Lycée Hoche
ECG1A
NOM :

2024-2025
Mathématiques

Interrogation n°2

Le 8/11

1. Définir la notion de suite arithmético-géométrique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n+2} k^2$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^3$. Montrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$ est une suite remarquable *(i.e. est arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 2 - on ne demande pas de calculer son terme général).*
4. Déterminer le terme général de la suite u donnée par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

— *Fin de l'énoncé* —

1. Voir cours.
2. $$S_n = \sum_{k=2}^{n+2} k^2 = (\sum_{k=1}^{n+2} k^2) - 1^2 = \frac{(n+2)(n+3)(2(n+2)+1)}{6} - 1 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} - 1.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2u_n^3) = \ln(2) + 3\ln(u_n) = \ln(2) + 3v_n$.

   Cette égalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_n$ est une suite arithmetico-géométrique.
4. u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-5x+4=0$ dont 1 est clairement solution, son autre solution est alors 4 (par les relations coefficients-racines).

   Ainsi, son discriminant est strictement positif, donc par théorème on dispose de réels λ et μ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 1^n + \mu 4^n = \lambda + \mu 4^n.$$

   Déterminons ces réels. $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc :

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 4\mu = 2 \end{cases}.$$

   Or,

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 4\mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ 1 - \mu + 4\mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu = \frac{2}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

   Donc :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{3} + \frac{4^n}{3}.$$