Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°6 : Systèmes linéaires

2024-2025
Mathématiques

Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(a) (S1) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

(b) (S2) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases}$

(c) (S3) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$

(d) (S4) $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ -6x+3y=1 \end{cases}$

Exercice 2 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(a) $(S1)$ $\begin{cases} 4x+y+z=2 \\ -3x-y-z=1 \\ x+2y+z=-3 \end{cases}$

(b) $(S2)$ $\begin{cases} -2x-4y+3z=-1 \\ 2y-z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

(c) $(S3)$ $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+3y+3z=-1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

(d) (S4) $\begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

(e) (S5) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$

(f) (S7) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3x+6y+3z=3 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

(g) $(S8)$ $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -6x-3y-3z=0 \\ x-y+z=4 \end{cases}$

(h) (S9) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3x+6y+3z=3 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$

(i) $(S10)$ $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+6y+9z=12 \\ -5x-10y-15z=-20 \end{cases}$

(j) (S11) $\begin{cases} x-2y+5z=13 \\ 2x+4y-5z=-12 \\ 3x-2y-z=3 \end{cases}$

Exercice 3 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(a) $(S1)$ $\begin{cases} 3x+3y-z+2t=-1 \\ -x+2y-z+t=-1 \\ x+y+2z-t=1 \\ y-z+t=-1 \end{cases}$

(b) $(S2)$ $\begin{cases} -3x+y+z+t=0 \\ x-3y+z+t=0 \\ x+y-3z+t=0 \\ x+y+z-3t=0 \end{cases}$

(c) $(S3)$ $\begin{cases} -x+y-z-t=2 \\ 2y-t=-1 \\ x+y-t=1 \\ y+z+t=-3 \end{cases}$

(d) $(S4)$ $\begin{cases} -x+3y+2z+2t=0 \\ 2x-5y+2z=0 \\ x+2y+2z+t=0 \end{cases}$

Exercice 4 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(a) $(S1)$ $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2} \end{cases}$

(b) $(S2)$ $\begin{cases} 4x+2y-2z=0 \\ 3x-y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$

(c) $(S3)$ $\begin{cases} 3x-6y-6z=0 \\ x-2y-3z=0 \\ -2x+4y+6z=0 \\ 6x-12y-12z=0 \end{cases}$

(d) $(S4)$ $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y-z-t=-1 \\ -x-y+3z+3t=3 \end{cases}$

(e) $(S5)$ $\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ 3x+y+z+t=0 \\ x+2y+2t=0 \end{cases}$

(f) (S6) $\begin{cases} x+2y-z+3t=3 \\ 2x+4y-3z+3t=2 \\ 2x+3y+3z-4t=1 \end{cases}$

Exercice 5 Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x+y+2z+5t+u & =3 \\ x+5y+2z+9t+3u & =19 \\ -x+2y-5z+7t-u & =33 \\ 2x-2y+5z+6t & =-12 \\ 4x+10y+4z+15t+9u & =15 \end{cases}$

Quelques problèmes classiques se ramenant à un système linéaire

Exercice 6

(a) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 1$.

(b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(2) = 0$.

(c) Soient a, b et c des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = a$, $P(0) = b$ et $P'(1) = c$ et exprimer ce polynôme en fonction de a, b et c.

Exercice 7 Résoudre le système d'équation suivant, d'inconnues x, y et z appartenant à $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ \dfrac{x^4y^3}{z} = 2 \\ xyz = 3 \end{cases}.$$

Exercice 8 Résoudre $\begin{cases} x+y=29 \\ x^2-y^2=145 \end{cases}$.

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 9 Résoudre en fonction des valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

(a) (S1) $\begin{cases} 3x+2y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$

(b) (S2) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y-z=b \\ -3x+y+3z=c \end{cases}$

(c) (S3) $\begin{cases} -2x-3y+3z=a \\ x+2y-z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$

(d) (S4) $\begin{cases} 2x+6y=a \\ x+3y=b \end{cases}$

(e) (S5) $\begin{cases} 13x-8y-12z=a \\ 12x+7y-12z=b \\ 6x-4y-5z=c \end{cases}$

(f) (S6) $\begin{cases} x+2y-3z+4t=a \\ 2x+3y+z-t=b \\ -4x-5y-9z+11t=c \\ 7x+10y+7z-8t=d \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

(a) (S1) $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=m \end{cases}$

(b) (S2) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ mx-6y=1 \end{cases}$

(c) (S3) $\begin{cases} (m+1)x+2y+3z=3 \\ mx+(m+1)y+z=1 \\ (m+2)x+(m+1)y+mz=m \end{cases}$

(d) (S4) $\begin{cases} (2-m)x+3y=0 \\ 3x+(2-m)y=0 \end{cases}$

(e) (S5) $\begin{cases} x+y+z & =m+1 \\ mx+y+(m-1)z & =m \\ x+my+(m+2)z & =1 \end{cases}$

(f) (S6) $\begin{cases} mx+y=m^2 \\ x+my=1 \end{cases}$

(g) (S7) $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$

(h) (S8) $\begin{cases} 2mx+(m-1)y+(5-m)z=0 \\ (m-1)x+2my+(m+7)z=0 \end{cases}$

Exercice 11 Discuter, en fonction des paramètres $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ les résolutions des systèmes linéaires :

(a) $(S1)\begin{cases} x+y+mz=a \\ x+my+z=b \\ mx+y+z=c \end{cases}$ (b) $(S2)\begin{cases} x+y-z=a \\ x+2y+mz=b \\ 2x+my+2z=c \end{cases}$

Exercice 12 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires :

(a) (S1) $\begin{cases} x+2y=\lambda x \\ 2x+y=\lambda y \end{cases}$ (c) (S3) $\begin{cases} 5x-3y=\lambda x \\ 3x-y=\lambda y \end{cases}$

(b) (S2) $\begin{cases} 5x-6y=\lambda x \\ 4x-5y=\lambda y \end{cases}$ (d) (S4) $\begin{cases} 2x-y=\lambda x \\ x+y=\lambda y \end{cases}$

Exercice 13 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires :

(a) (S1) $\begin{cases} -4x+6y-3z=\lambda x \\ -x+3y-z=\lambda y \\ 4x-4y+3z=\lambda z \end{cases}$ (b) (S2) $\begin{cases} z=\lambda x \\ z=\lambda y \\ x+y+z=\lambda z \end{cases}$

Exercice 14 On note (S) le système linéaire $\begin{cases} x+(1-m)y+2z=2 \\ mx+(m+1)y+z=1 \\ 2x+(m-1)z=m-1 \end{cases}$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont les inconnues.

(a) On considère le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 - 5X - 3$. Factoriser P le plus possible.

(b) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire (S) est-il de Cramer?

(c) Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire (S).