Lycée Hoche
ECG1 A
NOM :

2023-2024
Mathématiques

Interrogation n°2

Le 14 septembre

Exercice 1 *Sans justification, nier l'énoncé suivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x^a > y \text{ ou } y^a \geq x.$$

La négation de cet énoncé est :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}_+^*, x^a \leq y \text{ et } y^a < x.$$

Exercice 2 *La proposition suivante est-elle vraie? Le démontrer proprement.*

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l).$$

Montrons que cette proposition est vraie.
Soit $k \in \mathbb{R}_+$, montrons $\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$.
Ici, on doit comprendre la signification de l'énoncé, et réfléchir. x est fixé. On doit donc donner un réel l tel que, pour tout réel u positif, $(u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$. Mais pour u réel positif, on a $u^2 \geq k \iff u \geq \sqrt{k}$ par croissance stricte de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. Une fois qu'on a compris ça, on peut continuer.
On pose $l = \sqrt{k}$ (réel bien défini et positif, vu la positivité de k).
Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$:

$$u \geq l \iff u^2 \geq l^2 = k$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $(u, l) \in \mathbb{R}_+^2$.

On a donc bien montré :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$$

pour tout réel positif k, d'où le résultat.

Remarque. Méthode : Comment trouver l'idée de poser $l = \sqrt{k}$? Il faut manier un peu, au brouillon par exemple, la condition qu'on cherche sur le réel l. Ici, on veut l tel que : $\forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$. Alors on considère (au brouillon par exemple !) un réel u, qu'on pense quelconque et positif, et on "attaque" l'équivalence $(u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$, c'est à dire on la manie, on la change de forme. Ici, une démarche raisonnable est de commencer à regarder juste un sens de l'équivalence : $(u^2 \geq k) \Leftarrow (u \geq l)$. On veut l tel que cette implication soit vraie (pour tout u positif). Si on sait $u \geq l$, on peut penser à mettre cette expression au carré pour se rapprocher de celle de gauche (avec du u^2). Ce qui vient naturellement, c'est $u^2 \geq l^2$, d'où l'idée de regarder si un réel l tel que $l^2 = k$ (donc la racine de k) ne conviendrait pas. Ensuite, quand on rédige, on est très attentif aux détails : la positivité de k et u joue un rôle crucial, notamment pour que la mise au carré décrite ci-dessus donne bien une implication (et en fait, une équivalence).

Remarque. Logique : Attention, beaucoup d'élèves ont fait la faute logique décrite ici.
On veut démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l).$$

On fixe donc $k \in \mathbb{R}_+$ quelconque, et on cherche à montrer : $\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$. Cet énoncé n'est **pas directement une équivalence**, il y a des quantificateurs avant. Conséquence, les énoncés (a) et (b) suivants ne disent pas la même chose :

(a) $\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \iff (u \geq l)$,

(b) $\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \implies (u \geq l)$ et $\exists l \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_+, (u^2 \geq k) \Leftarrow (u \geq l)$.

Avant de lire la suite qui donne la réponse, essayez de comprendre la différence.

Dans l'énoncé (a), on cherche un réel l vérifiant l'équivalence, donc les deux implications (pour tout u positif). Dans l'énoncé (b), on cherche un réel vérifiant une implication, un réel vérifiant l'autre, mais on ne demande pas que ces réels soient les mêmes.

Exercice 3 *Résoudre l'inéquation* $\dfrac{1-x^2}{2x-1} > \dfrac{3}{2}$ *d'inconnue réelle x. On pourra, au besoin, montrer que* $\sqrt{19} > 4$.

Considérons l'inéquation (I) : $\dfrac{1-x^2}{2x-1} > \dfrac{3}{2}$.

Domaine : L'inéquation (I) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ car pour tout réel x, $\dfrac{1-x^2}{2x-1}$ est bien défini ssi $2x-1 \neq 0$, et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}.$$

Résolution : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^2}{2x-1} > \frac{3}{2} &\iff \frac{1-x^2}{2x-1} - \frac{3}{2} > 0 \\
&\iff \frac{1-x^2-3x+\frac{3}{2}}{2x-1} > 0 \\
&\iff \frac{-x^2-3x+\frac{5}{2}}{2x-1} > 0.
\end{aligned}$$

Déterminons le signe du polynôme de degré 2 donné par $-X^2-3X+\frac{5}{2}$. Son discriminant est 19, et $19>0$, donc ce polynôme admet deux racines qui sont, après calcul, $\dfrac{-3-\sqrt{19}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{19}}{2}$. Son coefficient dominant étant négatif, ce polynôme est négatif à l'extérieur de ses racines et positif sinon.

Enfin, $\sqrt{19} > 4$ car $19 > 4^2 = 16$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en tire :

$$\frac{-3-\sqrt{19}}{2} < 0 < \frac{1}{2} < \frac{-3+\sqrt{19}}{2}$$

ce qui nous permet de faire un tableau de signe (le faire!!) avec $-x^2-3x+\frac{5}{2}$, $2x-1$ puis notre quotient.

Finalement, $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I) \text{ est }]-\infty, \frac{-3-\sqrt{19}}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{-3+\sqrt{19}}{2}[.}$

Remarque. Attention, j'ai beaucoup vu dans vos copies la conclusion trop rapide suivante : le discriminant est strictement négatif donc il n'y a pas de solutions. C'est **très faux** ici, puisqu'on est face à une inéquation. Par exemple:

- Le polynôme X^2+1 a un discriminant strictement négatif,
- L'inéquation définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2+1>0$ admet $\mathbb{R}$ pour ensemble des solutions,
- L'inéquation $x^2+1<0$, par contre, n'admet pas de solutions.

Donc attention à ce mauvais automatisme !

Remarque. "Déterminons le signe du polynôme de degré 2 donné par $-X^2-3X+\frac{5}{2}$."

Dans cette phrase, je n'ai pas utilisé la variable x, car rigoureusement, elle est fixée ici, et $-x^2-3x+\frac{5}{2}$ est donc un réel. Or, dans ma phrase, je veux désigner un polynôme de degré 2, c'est-à-dire une fonction polynômiale. La notation "X" est standard : en mathématique, quand on écrit par exemple $3X+1$, on désigne *à priori* le polynôme donné par la fonction réelle $t \mapsto 3t+1$. Pourquoi *à priori* ? Parce que si vous avez eu la "mauvaise" idée de fixer une variable X dans le texte en amont, vous ne pouvez pas vraiment faire ça.

C'est du détail me direz vous, mais si vous faite ce genre de faute dans d'autre contextes (par exemple, en désignant par e^x la fonction exponentielle), on vous tape sur les doigts (c'est une vraie faute). On s'en sortirait ici en changeant la phrase : "Déterminons le signe de e^x en fonction du réel x" (ici, e^x désigne un réel et non une fonction).

Bref, pensez comme un informatique : en maths, les objets ont un "type", et je pense qu'y être attentif va vous aider. x et e^x sont des réels, $t \mapsto e^t$ est une fonction, $\mathbb{N}$ est un ensemble, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq 1$ est une proposition (fausse).

En physique, une des premières choses qu'on apprend aux élèves est de vérifier l'homogénéité de leur équation, c'est à dire de vérifier si les unités concordent : on ne peut pas raisonnablement avoir une égalité qui affirme qu'un temps (en secondes) est égal à une distance (en mètres). C'est un peu pareil ici : "un réel ne peut pas être égal à une fonction".Même si souvent on se permet de confondre, dans nos notations, la fonction constante égale à 2 avec le réel 2 (dans ce cas, on sait ce qu'on fait, on reste cohérent, et le but est uniquement de simplifier les notations). (Je tacherai d'éviter ce genre de raccourcis en première année).

— Fin de l'énoncé —