

Programme de colle n° 8 : Polynômes, systèmes linéaires.

Semaine du lundi 18 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Polynômes : chapitre complet

8.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Systèmes linéaires : chapitre complet

Peu de démonstrations dans ce chapitre, les élèves doivent surtout savoir résoudre tout système linéaire de taille explicite.

8.2 Notion d'équation linéaire. Coefficients et second membre d'une équation linéaire. Équation linéaire homogène. Solutions d'une équation linéaire. Toute équation linéaire homogène à n inconnues admet le n -uplet nul comme solution.

8.3 Système linéaire. Lignes d'un système linéaire, coefficients, second membre et solutions d'un système linéaire. Système linéaire incompatible, ou compatible. Systèmes linéaires équivalents. Théorème admis : tout système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

8.4 Système linéaire homogène. Le n -uplet nul est solution de tout système linéaire homogène à n inconnues.

8.5 Systèmes linéaires carrés, surdéterminés et sous déterminés. Système de Cramer.

8.6 Système linéaire triangulaire (supérieur), coefficients diagonaux. Un système linéaire triangulaire est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Résolution d'un système triangulaire de Cramer par la méthode « de la remontée ».

8.7 Notion de système linéaire échelonné. Ligne de compatibilité. Un système échelonné est incompatible si et seulement s'il admet une ligne de compatibilité de la forme $0 = b$, avec $b \in \mathbb{R}^*$. Résolution d'un système linéaire échelonné en se ramenant (s'il est compatible) au cas des systèmes triangulaires de Cramer, par identification des inconnues dites principales et paramétriques.

8.8 Le théorème des opérations élémentaires. Utilisation pour la mise en œuvre de l'algorithme du pivot de Gauss, permettant de déterminer un système échelonné équivalent à un système donné.

8.9 Combinaisons linéaires d'éléments de \mathbb{R}^n . L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est stable par combinaisons linéaires, et contient $0_{\mathbb{R}^n}$: on dit que c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Système linéaire homogène (S_h) associé à un système linéaire (S) , lien entre les solutions de (S) et de (S_h) .

Python

8.10 Tout algorithme classique sur les listes est au programme : recherches de maximum et variations (dont : deux plus grandes valeurs d'une liste de nombres), liste des termes d'une suite définie par une relation de récurrence quelconque d'ordre au plus 2. Tri par insertion. Utilisation de boucles imbriquées (ex. : recherche des deux plus proches éléments d'une liste de nombres).

Cette partie du cours est à lire par les élèves, certaines démonstrations seront données en annexe et ne sont pas exigibles.

Quelques questions de cours

1. Conformément au programme de la semaine dernière, tout élève devra poser au moins une division euclidienne de polynôme pendant sa colle (en question de cours ou lors d'un premier exercice).
2. Tout élève commencera sa colle par la résolution d'un système linéaire de taille raisonnable.
3. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée une liste de nombres de longueur au moins 2 et renvoyant en sortie les deux plus grandes valeurs (éventuellement égales) de cette liste.
4. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie la liste $[u_0, \dots, u_n]$ des termes de la suite récurrente suivante : (au choix de l'interrogation, ordre au plus 2).
5. À l'aide de fonctions auxiliaires, implémenter le tri par insertion en Python (exercice 30 complet).
6. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée une liste de nombres de longueur au moins 2 et renvoyant en

sortie les deux plus proches valeurs distinctes de cette liste.

7. Définir la notion de système de Cramer. Définir la notion de système triangulaire. A quelle condition un système triangulaire est-il de Cramer ?
8. Énoncer le théorème des opérations élémentaires. Démontrer son résultat pour la 3e opération.