Lycée Hoche
ECG1 A

2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 2

Devoir du ***16 novembre****.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les copies dont les résultats ne sont pas **encadrés** *seront sanctionnées* **sur la note finale***. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.*

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1

Questions de cours. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.

1. On pose $A = \{(t-1, t+1) | t \in \mathbb{R}_+\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq -1 \text{ et } y - x - 2 = 0\}$. Montrer que $A = B$.
2. Soit I une partie de $\mathbb{R}$.
   - (a) Définir : "La fonction f est croissante sur I".
   - (b) Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes sur I, alors $f + g$ est croissante sur I.
3. Donner sans justification le domaine de définition, de dérivabilité et l'allure du graphe des fonctions suivantes :
   - (a) $t \mapsto |t|$
   - (b) $t \mapsto \sqrt{t}$
4.
   - (a) La proposition "Toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ décroissante est majorée" est-elle vraie ? Justifier.
   - (b) La proposition "Toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ décroissante est minorée" est-elle vraie ? Justifier.
5. Soit n un entier naturel et q un réel. Compléter et démontrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots$
6.
   - (a) Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
   - (b) Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 - 3X^3 + 2X + 1$ par $2X^3 - X$.
7. On définit en Python la fonction suivante.

```python
def f(xa,xb):
    S=xa
    n=0
    while S<10:
        S+=xb
        n+=1
    return(n)
```

   - (a) Quelle valeur est renvoyée par l'appel de `f(1,3)` ?
   - (b) Que se passe-t-il lors de l'appel de `f(5,-1)` ? Expliquer.
8. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoyant en sortie la liste $[u_0, u_1, ..., u_n]$ formée de termes de la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall k \geq 0, u_{k+2} = 2\sqrt{u_k u_{k+1}^3}$.

Exercice 2 *Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. (a) Soit y un réel. Résoudre, en fonction de y, l'équation $x^2 - \dfrac{2}{x^2} = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

   (b) Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - \dfrac{2}{x^2} \end{array} \right.$. Que dire de l'injectivité de f ?

   (c) Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R}^*)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer quantités suivantes :

   (a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{2k}}{3^{k+1}}$. (b) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} nk(n-k)$. (c) $U_n = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})\right)$.

3. (a) Écrire le code d'une fonction d'entête `def factorielle(n):` prenant en entrée un entier naturel `n` et renvoyant `n`!.

   (b) En déduire un code Python permettant de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} \frac{k!}{2^k}$.

4. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 3 *Étude d'une suite.*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n - 3$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n + 2$.

2. (a) La suite u est-elle minorée?

   (b) La suite u est-elle majorée ?

3. Étudier la monotonie de u.

4. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def U(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie $u_{\mathtt{n}}$.

5. Écrire un code Python permettant d'afficher le plus petit entier N vérifiant $u_N \geq 1000$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n - 4$.

   (b) En déduire le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 *Étude d'une fonction et d'une suite.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$, ainsi que la suite u donnée par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^{u_n}.$$

1. Justifier que f est dérivable, et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Dresser le tableau de variations de f. On admet que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, et que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

3. (a) f admet-elle un minimum ?

   (b) Montrer, sans utiliser la notion de limite, que f n'admet pas de maximum.

4. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe C de f en le point d'abscisse 1.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - x \geq 0$. En déduire la position relative de C par rapport à T_1.
6. Tracer sur un même graphique la courbe C et sa tangente T_1. Donnée : $\frac{1}{e} \simeq 0,37$. *On prendra une unité suffisamment grande afin d'avoir un graphique lisible pour la question suivante.*
7. Placer, sur le graphique de la question précédente, quelques premiers termes de la suite u. Que conjecturer sur sa monotonie? Sur son caractère borné ou non ?
8. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
9. Étudier la monotonie de u.
10. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 5 *Problème : Suites, divisions euclidiennes et racines multiples*

Le but de ce problème est d'étudier quelques divisibilités entre des polynômes dépendant d'un paramètre. On en déduit, en dernière partie, une formule permettant de calculer les sommes de la forme $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, où q est un réel et $n \geq 1$ un entier naturel.

Les parties I et II sont indépendantes des autres, les parties III et IV sont liées.

Partie I : Étude de restes.

Dans cette partie, n est un entier naturel fixé et on considère le polynôme $P(X) = X^2 + X - 2$.

1. Factoriser le polynôme P.
2. Montrer que P ne divise pas le polynôme X^n.
3. On note respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par P. Justifier qu'il existe des réels a_n et b_n tels que :
$$R(X) = a_n X + b_n.$$
4. Déterminer $R(1)$ et $R(-2)$.
5. En déduire a_n et b_n.

Partie II : Étude de restes dans un second cas.

Dans cette partie, on note, pour tout entier naturel n, Q_n le quotient et R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$.

Pour les mêmes raisons celles attendues en question 3, on dispose, pour tout entier n, de réels a_n et b_n tels que :
$$R_n(X) = a_n X + b_n.$$

6. Justifier que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Déterminer a_1 et b_1.
7. Effectuer la division euclidienne de X^2 par $(X-1)^2$. En déduire Q_2, a_2 et b_2.
8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{n+1} = (XQ_n(X) + a_n)(X-1)^2 + (b_n + 2a_n)X - a_n$.
9. En déduire :
   (*a*) $\forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+1}(X) = XQ_n(X) + a_n$.
   (*b*) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n + 2a_n \\ b_{n+1} = -a_n \end{cases}$.
10. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. En déduire a_n, b_n puis $R_n(X)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

12. Montrer, à l'aide de la question 9a, que : $\forall n \geq 2, Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^k$.

13. Conclure en donnant explicitement l'égalité de division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, en fonction de l'entier n.

Partie III : Autour de la notion de racine multiple.

Pour tout polynôme P et pour tout réel a, on dit que a est *racine multiple* de P si $(X-a)^2 | P$.

14. (a) Montrer que 2 est racine multiple du polynôme $T(X) = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 8X - 8$.

    (b) En déduire une factorisation de T dont les facteurs sont de degré 1.

15. Soit a un réel et P un polynôme.

    (a) Montrer que si a est racine multiple de P, alors a est racine de P et de P'.

    (b) Réciproquement, on suppose que a est racine de P et de P'. Montrer que a est racine multiple de P. *On pourra considérer l'égalité de division euclidienne de P par $(X-a)^2$.*

Partie IV : Application au calcul d'une somme.

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 1 est racine multiple de $P_n(X)$.

17. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-1)^2$ et R_n son reste.

    (a) Déterminer $Q_1(X)$.

    (b) Déterminer $R_n(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

18. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(X) = (n+1)X^n(X-1)^2 + P_n(X)$.

    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_{n+1}(X) = Q_n(X) + (n+1)X^n$.

19. Déterminer, à l'aide de cette formule, $Q_2(X)$ puis $Q_3(X)$.

20. A l'aide d'une récurrence, déterminer $Q_n(X)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

21. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}.$$

    Que vaut cette somme si $q = 1$?

22. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 **Beaucoup plus difficile, à n'aborder que si tous les exercices précédents sont terminés**

Dans cet exercice, on considère un entier $d > 0$ qui n'est pas le carré d'un entier. On pose

$$A = \{a + b\sqrt{d} | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

et on admet les généralisations suivante de résultats montrés au DS1 :

- $\forall x \in A, \exists!(a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{d}$.
- $\forall (x, y) \in A^2, xy \in A$.

1. On fixe deux entiers relatifs a et b, et on pose $x = a + b\sqrt{d}$. Une récurrence rapide, avec le second résultat admis, montre : $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \in A$. Pour tout entier n on note a_n et b_n les entiers (uniques d'après le premier résultat admis) tels que :
$$x^n = a_n + b_n\sqrt{d}.$$
Déterminer a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On pourra déterminer une relation de récurrence vérifiée par $(a_n)_n$.

   En déduire une expression de b_n en fonction de n.

2. Pour tout $x \in A$, on pose $\overline{x} = a - b\sqrt{d}$ où a et b sont les uniques entiers tels que $x = a + b\sqrt{d}$. Montrer : $\forall (x, y) \in A^2, \overline{x \times y} = \overline{x} \times \overline{y}$.

3. En déduire une démonstration beaucoup plus simple du résultat de la question 1.

4. Soit P un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients entiers admettant deux racines distinctes x et y. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{Z}, x^n + y^n = \dfrac{c}{2^{n-1}}$.

— Fin de l'énoncé —