Lycée Hoche
ECG1A

2024-2025
Mathématiques

Corrigé du DS02

Devoir du ***16 novembre****.*

Exercice 1

1. On procède par double inclusion
   - Montrons $A \subset B$. Soit $a \in A$, montrons $a \in B$.

     $a \in A$ donc on dispose de $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $a = (t-1, t+1)$.

     Alors, $t \geq 1$ donc $t - 1 \geq -1$, et $(t+1) - (t-1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

     Donc $(t-1, t+1) \in B$.

     Donc $a \in B$. On a bien montré $A \subset B$.
   - Montrons $B \subset A$.

     Soit $b \in B$, montrons $b \in A$.

     $b \in B$ donc on dispose de réels x et y tels que $b = (x, y)$ et $x \geq -1$ et $y - x - 2 = 0$.

     Posons $t = x + 1$ $x \geq -1$ donc $t \in \mathbb{R}_+$.

     De plus, $y - x - 2 = 0$ donc $y = x + 2 = t + -1 + 1 = t + 1$. Ainsi, $b = (x, y) = (t-1, t+1)$.

     Donc on a montré l'existence de $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = (t-1, t+1)$.

     Donc $b \in A$.

     On a bien montré $B \subset A$.

   $\boxed{\text{Par double inclusion, } A = B.}$
2. Voir cours.
3. Voir cours.
4. (a) $\boxed{\text{Oui}}$, car si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, alors $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0}$ donc u est majorée par son premier terme u_{n_0}.

   (b) $\boxed{\text{Non}}$, par exemple la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ donnée par $u_n = -n$ est décroissante (car $\forall n \in \mathbb{N}, -(n+1) \leq -n$) et non minorée.

   En effet, pour tout réel M,
   - M ne minore pas u si $M > -n_0$ car alors $u_{n_0} < M$
   - M ne minore pas u sinon, car on dispose d'un entier naturel n tel que $n > -M$ et alors $u_n = -n < M$.

   Donc aucun réel M ne minore u : u n'est pas minorée.
5. Voir cours.
6. Voir cours.
7. (a) $\boxed{\texttt{f(1,3)} \text{ renvoie 3.}}$

   (b) Lors de l'appel de `f(5,-1)`, $\boxed{\text{la boucle while en ligne 4 ne s'arrête pas}}$ car la variable S est initialisée à 5 et est réduite de 1 à chaque tour de boucle, donc la condition d'arrêt `S>=10` de cette boucle sera toujours fausse.
8.
```python
import numpy as np
def ListeU(n):
    L=[1,1]
    for i in range(n-1):
        L.append(2*np.sqrt(L[-2]*L[-1]**3))
    return(L)
```

Exercice 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{x^2} = y &\overset{x^2 \neq 0}{\iff} x^4 - 2 = yx^2 \\ &\iff x^4 - yx^2 - 2 = 0 \\ &\iff P(x^2) = 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé $P(X) = X^2 - yX - 2$.

P est un polynôme du second degré, de discriminant $y^2 + 8 > 0$ (car $y^2 \geq 0$) donc P admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{y + \sqrt{y^2+8}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{y - \sqrt{y^2+8}}{2}.$$

De plus, $y^2 + 8 > y^2 \geq 0$ donc par croissante stricte de $t \mapsto \sqrt{t}$, on a $\sqrt{y^2+8} > \sqrt{y^2} = |y|$.

Donc $\sqrt{y^2+8} > y$ et $\sqrt{y^2+8} > -y$.

Donc $y + \sqrt{y^2+8} > 0$ et $y - \sqrt{y^2+8} < 0$.

Donc $x_1 > 0 > x_2$.

Reprenons alors la chaine d'équivalence précédente : x est solution de l'équation étudiée si et seulement si x^2 est racine de P, si et seulement si :

$$x^2 = x_1 \text{ ou } x^2 = x_2.$$

Mais $x_1 > 0 > x_2$ donc cette dernière condition équivaut à $x^2 = x_1$. Enfin :

$$x^2 = x_1 \iff x = \sqrt{x_1} \text{ ou } x = -\sqrt{x_1}.$$

Enfin, $x_1 > 0$ donc $\sqrt{x_1} \neq -\sqrt{x_1}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } x^2 - \frac{2}{x^2} = y \text{ admet exactement deux solutions : } \sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}}}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout réel y, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet exactement deux solutions.

Donc tout réel y admet exactement deux antécédents pas f.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

(c) D'après la question a), tout réel y admet au moins un antécédent par f.

Donc $\mathbb{R} \subset f(\mathbb{R}^*)$.

f étant à valeurs réelles, $f(R^*) \subset \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}.}$

2.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{((-2)^2)^k}{3 \times 3^k} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{3^k} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1-(\frac{4}{3})^n}{1-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{4}{3}((\frac{4}{3})^n - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} kn^2 - nk^2 \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n} k - n \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&\overset{(2)}{=} n^2 \frac{n(n+1)}{2} - n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= n^2(n+1)\left(\frac{n}{2} - \frac{2n+1}{6}\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_n &= \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\
&= \ln\left((\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k})(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k})\right) \\
&\overset{(3)}{=} \ln\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{S_n = \frac{4}{3}((\frac{4}{3})^n - 1).}$ Donc $\boxed{T_n = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{6}.}$ Donc $\boxed{U_n = \ln(\frac{n+1}{2n}).}$

(1) : On reconnait une somme géométrique de raison $\frac{4}{3} \neq 1$.

(2) : D'après les sommes usuelles.

(3) : On reconnait deux produits téléscopiques.

3. (a)

```python
def factorielle(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*k
    return(P)
```

(b)

```python
S = 0 # contiendra la somme demandée
for k in range(1,2025):
    S+=factorielle(k)/(2**k)
print(S)
```

4. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$".

- Initialisation :

  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, $\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} = 1$.

  Par croissance de l'exponentielle, $x \geq 0$ donne $e^x \geq e^0 = 1$.

  Donc on a bien montré $P(0)$: $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!}$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \end{array} \right.$.

  g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de la fonction exponentielle et d'un polynômes, qui sont des fonctions usuelles dérivables.

  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!}$$

  Or, pour tout $k \geq 1$, $k - 1 \geq 0$ donc $k! = k \cdot (k-1)!$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \overset{(j=k-1)}{=} e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$$

Par $P(n)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) \geq 0$.

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq g(0) = 0$.

On a donc bien montré :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}.$$

D'où $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

$\boxed{\text{On a bien montré, par récurrence, que pour tout entier naturel } n : \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.}$

Exercice 3

1. Montrons pas récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$u_n > n+2$".
   - Initialisation : $u_0 = 3 > 2 = 0 + 2$ donc $P(0)$ est vraie. D'où l'initialisation.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Par $P(n)$, $u_n > n+2$. Donc $3u_n > 3(n+2) = 3n+6$ puis $u_{n+1} = 3u_n - 2n - 3 > 3n+6-2n-3 = n+3$.

     Donc $u_{n+1} > (n+1) + 2$.

     Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

   $\boxed{\text{On a bien montré par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > n+2.}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n + 2 \geq 2$ donc $\boxed{\text{la suite } u \text{ est minorée par 2.}}$

   (b) Montrons que u n'est pas majorée.

   Soit M un réel, montrons que M ne majore pas u. Si $M < 3$, alors M ne majore pas u car $u_0 = 3$. Sinon, posons $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. $n_0 > M > 0$ et d'après la question précédente, $u_{n_0} > n_0 + 2 > M$. Donc M ne majore pas u dans ce cas.

   Ainsi, $\boxed{u \text{ n'est pas majorée.}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n - 3 - u_n = 2u_n - 2n - 3 \overset{(par\ 1.)}{>} 2(n+2) - 2n - 3 = 1.$$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.

   Donc $\boxed{u \text{ est strictement croissante.}}$

4.
```
def U(n):
    u=3
    for k in range(n):
        u=3*u-2*k -3
    return(u)
```

5.
```
u=3 # contient les termes de u
N=0 # rang du terme contenu dans u
while u<1000:
    u=3*u-2*N-3
    N+=1
print(N)
```

On pouvait aussi utiliser la question précédente avec le code suivant (cela fait faire beaucoup plus de calculs à l'ordinateur).

```
N=0 # rang du terme testé
while U(n)<1000:
    N+=1
print(N)
```

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = 3u_n - 2n - 3 - n - 1 = 3u_n - 3n - 4 = 3(u_n - n) - 4 = 3v_n - 4.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n - 4.}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x = 3x - 4 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$

Posons $w_n = v_n - 2$ pour tout entier naturel n.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = v_{n+1} - 2 = 3v_n - 4 - 2 = 3(v_n - 2) = 3w_n$.

Donc $(w_n)_w$ est géométrique de raison 3. Par théorème :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3^n w_0 = 3^n(v_0 - 2) = 3^n(u_0 - 2) = 3^n.$$

Par conséquent : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = w_n + 2 = 3^n + 2.}$

Puis : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + n = 3^n + n + 2.}$

Exercice 4

1. $g : t \mapsto t\ln(t)$ est dérivable sur son domaine de définition en tant que produit des fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$, dérivables sur leur domaine de définition.

Donc $f : t \mapsto t^t = \exp(t\ln(t))$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de g par la fonction exponentielle, également dérivable sur son domaine de définition.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

donc

$$f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = (\ln(x) + 1)e^{g(x)} = (\ln(x) + 1)x^x.$$

$\boxed{f \text{ est dérivable, et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = (\ln(x) + 1)x^x.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Par positivité stricte de l'exponentielle, $x^x = e^{g(x)} > 0$.

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln(x) + 1$.

Or, $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \dfrac{1}{e}$ (et la même chaîne d'équivalences est vraie avec des égalités).

Par conséquent, f' est strictement négative sur $]0, \frac{1}{e}[$, s'annule en 0 et est strictement positive sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

On a donc le tableau de variations suivant.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|1$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) D'après le tableau de variation précédent, $\boxed{f \text{ admet un minimum en } \frac{1}{e}}$ valant $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$.

   (b) Montrons que f n'a pas de maximum en x_0, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

   Si $x_0 \geq \frac{1}{e}$, alors par croissance stricte de f sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ on a :

$$f(x_0 + 1) > f(x_0).$$

   Donc dans ce cas, f n'atteint pas de maximum en x_0.

   Sinon, $0 < x_0 < \frac{1}{e}$. Alors, $0 < \frac{x_0}{2} < x_0 < \frac{1}{e}$. Par décroissance stricte de f sur $]0, \frac{1}{e}]$:

$$f(\frac{x_0}{2}) > f(x_0).$$

   Donc dans ce cas, f n'atteint pas de maximum en x_0.

   Dans tous les cas, f n'atteint pas de maximum en x_0, et ce pour tout $x_0 > 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ n'a pas de maximum.}}$

4. f est dérivable en 1 donc T_1 existe. De plus, $f(1) = 1^1 = 1$ et $f'(1) = 1 \cdot 1^1 = 1$ donc une équation de T_1 est :

$$y = 1 + 1 \cdot (x - 1).$$

Donc : $\boxed{T_1 \text{ est la droite d'équation } y = x.}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) - x \geq 0 \iff x^x \geq x \iff e^{x\ln(x)} \geq e^{\ln(x)} \iff x\ln(x) \geq \ln(x)$$

(par croissance stricte de l'exponentielle).

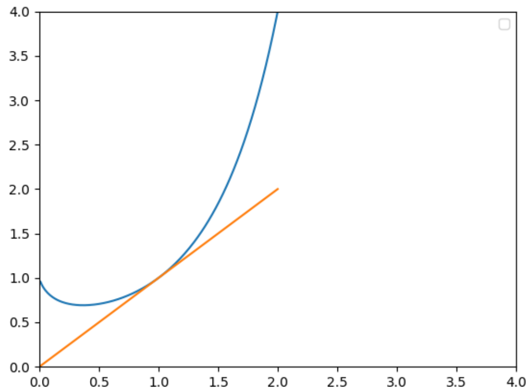
Or, si $x \geq 1$ alors $\begin{cases} \ln(x) \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ donc $x\ln(x) \geq x$.

Sinon, $0 < x < 1$ donc $\begin{cases} \ln(x) < 0 \\ x < 1 \end{cases}$ donc $x\ln(x) > \ln(x)$.

Dans tous les cas, $x\ln(x) > \ln(x)$, donc $f(x) - x \geq 0$.

$\boxed{\text{On a bien montré : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - x \geq 0.}$

On a donc $f(x) \geq x$ pour tout $x > 0$: $\boxed{\text{La courbe } C \text{ est au dessus de sa tangente } T_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

6. 

7. $\boxed{\text{On peut conjecturer que } u \text{ est croissante, majorée par 1 (et tend vers 1 - HP pour le moment).}}$

8. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$".

   Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

   - Initialisation : $u_0 = 1/2$ par définition de u donc u_0 existe et $u_0 > 0$, d'où l'initialisation.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

     Par $P(n)$, u_n existe et $u_n > 0$.

     Donc u_n appartient au domaine de définition de f : u_{n+1} est donc bien défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, $u_{n+1} = e^{u_n \ln(u_n)} > 0$ par positivité stricte de l'exponentielle.

     Ceci montre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

     $\boxed{\text{Ainsi, } u_n \text{ existe et } u_n > 0 \text{ pour tout entier naturel } n.}$

9. D'après la question 6 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq x$.

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$.

   Donc $\boxed{\text{La suite } u \text{ est croissante.}}$

10. u étant croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 = \dfrac{1}{2}$.

    Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$u_n \leq 1$".

    - Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2} \leq 1$ donc $P(0)$ est vraie.
    - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

      On a vu que $\dfrac{1}{2} \leq u_n$ donc, par $P(n)$: $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

      Donc $\dfrac{1}{e} \leq u_n \leq 1$.

      Par croissance de f sur $[\dfrac{1}{e}, +\infty[$:

      $$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = 1.$$

      D'où $P(n+1)$: $u_{n+1} \leq 1$, d'où l'hérédité.

    $\boxed{\text{On a donc bien montré : } \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1.}$

Exercice 5

1. 1 est racine de P, et à l'aide des relations coefficients racines on trouve que -2 est racine de P. P étant unitaire de degré 2, sa forme factorisée est :

   $\boxed{P(X) = (X-1)(X+2).}$

2. *Il y avait pas mal de manière de traiter cette question.* $1 \neq -2$ donc par théorème, $(X-1)(X+2)|X^n$ si et seulement si 1 et -2 sont racines de X^n.

   Or, $1^n = 1 \neq 0$ donc 1 n'est pas racine de X^n.

   Donc $\boxed{P \text{ ne divise pas } X^n.}$

3. D'après la théorème de la division euclidienne, on a :

   $$\begin{cases} X^n = Q(X)P(X) + R(X) \\ deg(R(X)) \leq deg(P(X)) - 1 = 1 \end{cases}.$$

   Donc R étant de degré au plus 1 :

   $\boxed{\text{il existe des réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } R(X) = a_nX + b_n.}$

4. Reprenons l'égalité de division euclidienne : $X^n = Q(X)P(X) + R(X)$.

   Evaluons celle-ci en 1, il vient : $1^n = Q(1)P(1) + R(1)$.

   Or, $P(1) = 0$. Donc $R(1) = 1^n = 1$.

   De même, $(-2)^n = Q(-2)P(-2) + R(-2)$ et $P(-2) = 0$ donc $R(-2) = (-2)^n$.

   $\boxed{R(1) = 1 \text{ et } R(-2) = (-2)^n.}$

5. D'après la question précédente :

   $$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -2a_n + b_n = (-2)^n \end{cases}$$

   Donc $b_n = 1 - a_n$ puis $-2a_n + (1 - a_n) = (-2)^n$.

   Ainsi : $\boxed{a_n = \dfrac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b_n = \dfrac{(-2)^n + 2}{3}.}$

6. On a $X^0 = 1$.

   Donc $X^0 = 0(X-1)^2 + 1$ et $deg(1) = 0 \leq deg((X-1)^2) - 1$.

   Par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne, $Q_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $R_0(X) = 1$.

   Donc $\boxed{a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1.}$

   De plus, $X^1 = 0(X-2)^2 + X$ et $deg(X) \leq deg((X-1)^2) - 1$ donc par unicité du quotient et du reste :

   $$Q_1 = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ et } R_1(X) = X = 1 \cdot X + 0.$$

   Donc $\boxed{a_1 = 1 \text{ et } b_1 = 0.}$

7. En effectuant cette division euclidienne, on trouve l'égalité de division euclidienne :

   $$X^2 = 1 \cdot (X-1)^2 + 2X - 1.$$

   Donc $R_2(X) = 2X - 1$ et $Q_2(X) = 1$.

   Ainsi, $\boxed{Q_2(X) = 1,\ a_2 = 2 \text{ et } b_2 = -1.}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Ecrivons l'égalité de division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$:

   $$X^n = Q_n(X)(X-1)^2 + a_nX + b_n.$$

   Donc :

   $$X^{n+1} = XQ_n(X)(X-1)^2 + a_nX^2 + b_nX$$

   .

   Or, $X^2 = (X-1)^2 + 2X - 1$. On a donc :

   $$X^{n+1} = XQ_n(X)(X-1)^2 + a_n(X-1)^2 + 2a_nX - a_n + b_nX = (XQ_n(X)+a_n)(X-1)^2 + (b_n+2a_n)X - a_n$$

   .

   On a donc montré :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X^{n+1} = (XQ_n(X)+a_n)(X-1)^2 + (b_n+2a_n)X - a_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

   $$X^{n+1} = (XQ_n(X)+a_n)(X-1)^2 + (b_n+2a_n)X - a_n.$$

   De plus, $deg((b_n+2a_n)X - a_n) \leq 1 = deg((X-1)^2) - 1$.

   Cette égalité est donc l'égalité de division euclidienne de X^{n+1} par $(X-1)^2$ (par unicité dans le théorème de la division euclidienne). On en déduit, pour tout entier n :

   (a) $\boxed{Q_{n+1}(X) = XQ_n(X) + a_n}$

   (b) $R_{n+1}(X) = (b_n+2a_n)X - a_n$ donc par unicité des coefficients :

   $\boxed{a_{n+1} = b_n + 2a_n \text{ et } b_{n+1} = -a_n.}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

    D'après la question précédente, $a_{n+2} = b_{n+1} + 2a_{n+1}$ et $b_{n+1} = -a_n$.

    donc $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

    On a donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n.}$

11. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

    $$x^2 - 2x + 1 = 0$$

    Or, $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ donc cette équation caractéristique admet 1 comme unique racine et son discriminant est nul.

    Par théorème, on dispose de réels λ et μ tels que :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n.$$

    De plus, $a_0 = 0$ donc $\lambda = 0$, et $a_1 = 1$ donc $\mu = 1$.

    Ainsi :$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n$.

    Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = -a_n = -n$.

    Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -(n-1) = 1-n$. Cette formule reste valable pour $n = 0$ car $b_0 = 1$.

    Finalement,

    $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ a_n = n,\ b_n = 1-n \text{ et } R_n(X) = nX + 1 - n = n(X-1) + 1.}$

12. Montrons par récurrence :

$$\forall n \geq 2, P(n) : \text{“}Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^k\text{”}.$$

- Initialisation : On a montré question 7 que $Q_2(X) = 1$. Or, $a_1 = 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{0} a_{1-k} X^k = a_1 X^0 = 1 = Q_2(X).$$

  Ceci montre $P(2)$, d'où l'initialisation.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par la question 9a), $Q_{n+1}(X) = XQ_n(X) + a_n$.

  Par hypothèse de récurrence, $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^k$. Il vient :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(X) &= a_n + X \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^k \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^{k+1} \\
&\overset{(j=k+1)}{=} a_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1-(j-1)} X^j \\
&= a_{n-0} X^0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} X^j \\
&= \sum_{j=0}^{(n+1)-2} a_{(n+1)-1-j} X^j
\end{aligned}$$

  Ceci montre $P(n+1)$ d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 2, Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-1-k} X^k.}$$

13. D'après la question précédente et le résultat de la question 11, l'égalité de division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est donnée par :

- $\boxed{X^n = \left(\sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) X^k\right)(X-2)^2 + (n(X-1)+1)}$ pour tout $n \geq 2$,

- $\boxed{X^0 = 0(X-1)^2 + 1 \text{ et } X^1 = 0(X-1)^2 + X}$ pour les cas $n = 0$ et $n = 1$.

14. (*a*) On effectue la division euclidienne de $T(X)$ par $(X-2)^2$ *(la poser)*.

    On trouve un reste nul, l'égalité de division euclidienne étant :

$$T(X) = (X-2)^2(X^2-2).$$

    Donc $(X-2)^2 | T$: $\boxed{2 \text{ est racine multiple de } T.}$

    (*b*) D'après le calcul de la question précédente :

$$T(X) = (X-2)^2(X^2-2) = (X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}).$$

$$\boxed{\text{La factorisation voulue est } T(X) = (X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}).}$$

15. (a) Si a est racine multiple de P, alors on dispose de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$.

Évaluons cette égalité en a, il vient :

$$P(a) = (a-a)^2 Q(a) = 0^2 Q(a) = 0.$$

Donc a est racine de P.

D'autre part, en dérivant chaque membre de l'égalité $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$, on obtient :

$$P'(X) = 2(X-a)Q(X) + (X-a)^2 Q(X)$$

Ainsi :

$$P'(a) = 2(a-a)Q(a) + (a-a)^2 Q'(a) = 0 + 0 = 0.$$

Donc $\boxed{\text{si } a \text{ est racine multiple de } P\text{, alors } a \text{ est racine de } P \text{ et de } P'.}$

(b) Réciproquement, supposons a racine de P et de P'.

Notons respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. On sait que $deg(R) \leq deg((X-a)^2) - 1 = 1$ donc on dispose de réels α et β tels que $R(X) = \alpha X + \beta$.

Évaluons l'égalité de division euclidienne $P(X) = (X-a)^2 Q(X) + R(X)$ en a. Il vient :

$$R(a) = P(a).$$

Donc $R(a) = 0$ (car a est racine de P).

Dérivons cette égalité de division euclidienne, il vient :

$$P'(X) = 2(X-a)Q(X) + (X-a)^2 Q(X) + R'(X).$$

en évaluant cette égalité en a, il vient :

$$P'(a) = R'(a).$$

donc $R'(a) = 0$ (car a est racine de P').

On a donc $\begin{cases} R(a) = 0 \\ R'(a) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha a + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ d'où $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi, $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $(X-a)^2$ divise P.

$\boxed{\text{On a bien montré que réciproquement, si } a \text{ est racine de } P \text{ et de } P'\text{, alors } a \text{ est racine multiple de } P.}$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P_n(1) = n - (n+1) - 1 = 0$$

et

$$P_n'(1) = n(n+1) - (n+1)n = 0.$$

Donc 1 est racine de P_n et de P_n'. D'après le résultat de la question 15b :

$\boxed{1 \text{ est racine multiple de } P_n\text{, et ce pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

17. (a) On a $P_1(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

On a donc l'égalité :

$$P_1(X) = 1 \cdot (X-1)^2 + 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

De plus, $deg(0_{\mathbb{R}[X]} \leq 1$. Donc cette égalité est l'égalité de division euclidienne de P_1 par $(X-1)^2$.

$\boxed{\text{On a donc } Q_1(X) = 1.}$

(b) $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, } (X-a)^2 \text{ divise } P_n \text{ (question 16) donc par théorème, } R_n = 0_{\mathbb{R}(X]}.}$

18. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$(n+1)X^n(X-1)^2+P_n(X) = (n+1)X^n(X^2-2X+1)+P_n(X) = (n+1)X^{n+2}-2(n+1)X^{n+1}+(n+1)X^n+P_n(X)$.

Avec l'expression de P_n, on a donc :

$$\begin{aligned}(n+1)X^n(X-1)^2+P_n(X) &= (n+1)X^{n+2}-2(n+1)X^{n+1}+(n+1)X^n+nX^{n+1}-(n+1)X^n+1\\ &= (n+1)X^{n+2}-(2n+2-n)X^{n+1}+1\\ &= P_{n+1}(X).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a donc montré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)X^n(X-1)^2+P_n(X) = P_{n+1}(X).}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Utilisons l'égalité $P_n(X) = Q_n(X)(X-2)^2$ dans le résultat de la question précédente. Il vient :

$$P_{n+1}(X) = (n+1)X^n(X-1)^2 + Q_n(X)(X-2)^2 = ((n+1)X^n + Q_n(X))\,(X-2)^2.$$

Donc par unicité de la division euclidienne :

$\boxed{Q_{n+1}(X) = (n+1)X^n + Q_n(X), \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

19. $Q_1(X) = 1$ donc d'après la relation trouvée à la question précédente :

$\boxed{Q_2(X) = 2X + Q_1(X) = 2X+1.}$

Alors, toujours d'après la formule précédente :

$\boxed{Q_3(X) = 3X^2 + Q_2(X) = 3X^2+2X+1.}$

20. Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) : \text{“}Q_n(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}\text{”}.$$

- Initialisation : $Q_1(X) = 1 = 1X^0 = \sum_{k=1}^{1} kX^{k-1}$ donc $H(1)$ est vraie, d'où l'initialisation.
- Hérédité : Soit$n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$.

  Par $H(n)$, $Q_n(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.

  D'après le résultat de la question 18b, $Q_{n+1}(X) = (n+1)X^n + Q_n(X)$.

  On a donc :

$$Q_{n+1}(X) = (n+1)X^n + \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = (n+1)X^{n+1-1} + \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} kX^{k-1}.$$

  Ceci prouve $H(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a donc montré par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* Q_n(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}.}$

21. Tout d'abord, $\boxed{\text{si } q=1 \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente (et le fait que $R_n(X) = 0$) :

$$P_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}\right)(X-1)^2.$$

Evaluée en q, cette égalité donne :

$$nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}\right)(q-1)^2.$$

Or, $q \neq 1$ donc $(q-1)^2 \neq 0$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}, \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout réel } q \neq 1.}$$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1}$.

Or, $\dfrac{1}{2} \neq 1$ donc d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{\dfrac{n}{2^{n+1}} - \dfrac{n+1}{2^n} + 1}{(-\dfrac{1}{2})^2} = \frac{4}{2^{n+1}}(n - 2(n+1) + 2^{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}(2^{n+1} - n - 2)$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}(2^{n+1} - n - 2) = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}}$$

— *Fin du corrigé* —