Programme de colle n^o 9 : Ensembles et applications.

*Semaine du lundi **25 novembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Systèmes linéaires, chapitre complet

9.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Ensembles

9.2 Rappels sur les définitions en extension et en compréhension des ensembles. Notion de singleton.

9.3 Inclusion d'ensembles, égalité d'ensembles par double inclusion, par chaîne d'équivalence. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. Réunion et intersection de parties d'un ensemble E. Complémentaire $\mathcal{C}_E(A)$ (ou $\bar{A}$ si le contexte est clair) d'une partie A d'un ensemble E. Différence ensembliste $A \setminus B$ de deux ensembles A et B. Parties disjointes, caractérisation des parties disjointes. Représentation de ces opérations par des diagrammes de Venn ("en patates").

9.4 Propriétés élémentaires de la réunion, de l'intersection et du complémentaire. Associativité, commutativité et distributivités danbs le contexte des opérations ensemblistes, lois de De Morgan.

9.5 Produit cartésien de deux ensembles, de $n \in \mathbb{N}^*$ ensembles. Ensembles E^n des n-uplets d'éléments d'un ensemble E. Réunions et intersections généralisées. Inclusions des réunions et intersections généralisées. Familles d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I, ensemble E^I.

Applications

9.6 Notion d'application, ensemble B^A des applications de A vers B. Exemples dans de multiples contextes. Application identité Id_E d'un ensemble E.

9.7 Notion d'antécédent. Ensemble image $f(A)$ d'une application $f : A \to B$. Ensemble image $f(C)$ de C par f, pour toute partie C de l'ensemble de départ de f.

9.8 Composée $g \circ f$ d'une application $f : A \to B$ par une application $g : B \to C$. Cas particulier des fonctions réelles, qui dérogent à cette définition. Pour toute application $f : A \to B$, on a $f \circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_B \circ f = f$. Associativité de la composition.

9.9 Notion d'application injective. Méthodes pour démontrer qu'une application est injective. Cas particulier des fonctions réelles : toute fonction réelle strictement monotone est injective.

9.10 Notion d'application surjective. Quelques exemples.

Python

9.11 Utilisation de matplotlib.pyplot pour le tracé de fonctions et de suites (terminé).

Quelques questions de cours

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$, d'inconnues x, y, z.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 1$.
3. Démontrer que $\{(t-1, t+1) | t \in \mathbb{R}_+\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq -1 \text{ et } y - x - 2 = 0\}$.
4. Énoncer et démontrer les propriétés élémentaires (prop. 18, 19 ou 22) de l'intersection, de la réunion ou du passage au complémentaire, au choix de l'interrogation.
5. Énoncer les propriétés d'associativité, de commutativité, de distributivités relatives à la réunion et à l'intersection, ainsi que les lois de De Morgan. Représenter sur un diagramme $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et simplifier cette expression ensembliste, où A et B sont deux parties d'un ensemble E.
6. Définir les notions de réunions et d'intersection généralisées (def. 32). Énoncer la proposition (33) relative aux inclusions de ces objets. Compléter et démontrer : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] = ...$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}[= ...$ (usage des limites autorisé).
7. Définir la notion d'application. Définir la notion d'ensemble image d'une application, l'ensemble image d'une partie de son ensemble de départ par une application. Déterminer l'ensemble image de $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$.
8. Définir la notion d'application injective. Montrer que $h : \left| \begin{array}{lcl} \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ est injective. Qu'en est-il de $\left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$?
9. Écrire un code Python permettant de tracer sur un même graphique les 50 premiers termes des suites u et v définies explicitement de la manière suivante : (au choix de l'interrogation). On mettra une légende permettant de différencier ces tracés.
10. Écrire un code Python permettant de tracer les 50 premiers termes de la suite définie par récurrence de la manière suivante (au choix de l'interrogation, relation de récurrence d'ordre au plus 2).
11. Écrire un code Python permettant de tracer le graphe de la fonction suivante sur le segment suivant (au choix de l'interrogation).