

# Chapitre 8 : Asymptotique des suites

ECG1 A, Lycée Hoche

## I. Généralités sur les limites

**Remarque. Rappel :** pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $|b - a|$  est la distance entre  $a$  et  $b$ .

Le but de ce chapitre est de définir les notions liées à l'asymptotique des suites (l'étude des limites de suites) et de voir les grands théorèmes classiques d'existence de limites.

Alors, si  $u$  est une suite réelle, quel sens donner à "la suite  $u$  tend vers le réel  $r$ "? Comment le formaliser?

Prenons la suite  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  donnée par  $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ , et admettons la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

Ainsi par exemple,  $u_{10} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$  (On rappelle  $0! = 1! = 1$ ).

Écrivons le début du développement décimal de  $e$  :

$$e \simeq 2,718281828459045.$$

Calculons, à l'aide du programme Python suivant, quelques termes de  $u$  :

```
1 def Factorielle(n):
2     P=1
3     for i in range(1,n+1):
4         P=P*i
5     return(P)
6
7 def SuiteU(n):
8     u=0
9     for k in range(n+1):
10        u=u+(1/Factorielle(k))
11    return(u)
```

```
>>> SuiteU(1)
2.0
>>> SuiteU(2)
2.5
>>> SuiteU(5)
2.7166666666666663
>>> SuiteU(10)
2.7182818011463845
>>> SuiteU(12)
2.7182818282861687
>>> SuiteU(15)
2.718281828458995
>>> SuiteU(20)
2.7182818284590455
```

On observe le phénomène suivant : les décimales de  $u_n$  semblent, au fur et à mesure que  $n$  augmente, se stabiliser sur les décimales de  $e$ . Cela n'est que de l'observation, et pas une démonstration, mais le phénomène est bien réel. A partir d'un moment, c'est à dire pour  $n$  plus grand qu'un certain entier  $N_0$  (qu'on pourrait trouver), tous les développements décimaux des  $u_n$  commencent par

$$2,7182.$$

Puis, pour  $n$  assez grand, plus grand qu'un certain entier  $N_1$ , tous les développements décimaux des  $u_n$  commencent par

$$2,718281828.$$

Et on peut continuer comme cela à l'infini : pour  $n$  assez grand, les développements décimaux des  $u_n$  commencent par

$$2,718281828459045$$

et on pourrait continuer en prenant développement décimal  $e$  avec plus de décimales, c'est à dire "avec n'importe quelle précision".

Alors, comment formaliser "les développements décimaux de  $u_n$  et  $e$  coïncident jusqu'à la  $K$ -ième décimale après la virgule" ?

Dire cela, c'est dire que la soustraction  $u_n - e$  n'a que des chiffres nuls jusqu'à la  $K + 1$ -ième décimale après la virgule. Par exemple, ci-dessus :

$$u_{10} - e \simeq -0.0000000273\dots$$

Autrement dit, cela revient à dire :

$$-10^{-K} \leq u_n - e \leq 10^{-K}.$$

(On pourrait mettre des inégalités strictes, ça ne change pas grand chose pour la fin)

Ce qu'on réécrit immédiatement :

$$|u_n - e| \leq 10^{-K}.$$

Alors, dire "Pour  $n$  plus grand qu'un certain entier  $N_0$ , les développements décimaux de  $u_n$  et  $e$  coïncident jusqu'à la  $K$ -ième décimale après la virgule", on peut écrire :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq 10^{-K}.$$

Pour finir, il reste à généraliser un tout petit peu notre "précision". On a ici pensé les choses avec les développements décimaux, mais en fait le rôle du  $10^{-K}$  ci-dessus est juste de mesurer la distance de  $u_n$  à  $e$ . Ce qui compte, c'est que l'assertion ci-dessus soit vraie pour tout  $K$  assez grand. Autrement dit, pour tout réel  $\epsilon > 0$ , si petit qu'on choisisse de le prendre, on veut que  $u_n$  et  $e$  soient à distance au plus  $\epsilon$  l'un de l'autre, à partir d'un certain rang. Cela donne la définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon.$$

Pensez la chose comme ça :

- Si  $\epsilon > 0$  est fixé, " $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon$ " signifie que " $u_n$  est à distance au plus  $\epsilon$  de  $e$  pour tout  $n$  plus grand qu'un certain entier  $N_0$ ". Si vous pensez développement décimal, deux nombres "assez proches" ont un développement décimal commençant "par les mêmes chiffres".
- Dire que  $u$  converge vers  $e$ , c'est dire que l'énoncé ci-dessus est vrai pour toute précision  $\epsilon$  (pensée "de plus en plus petite") qu'on pourrait avoir envie de vérifier, donc c'est dire :
- $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon$ .

Enfin, pour les limites infinies, la morale est la même. Dire que  $u$  tend vers  $+\infty$  par exemple, c'est dire que les termes  $u_n$  peuvent être tous rendus aussi grand que voulu à partir d'un certain rang. Cela donne :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > A.$$

## 1. Définitions

Dans les énoncés de ce chapitre, **toutes les suites considérées sont de la forme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire définies sur  $\mathbb{N}$** . Les énoncés s'adaptent immédiatement pour les suites de la forme  $(u_n)_{n \geq n_0}$ , où  $n_0$  est un entier naturel, mais pas pour des suites dont le domaine de définition est plus exotique.

### a) Suites admettant une limite finie

**Définition 1.** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $l$  un réel. On dit que  $u$  converge vers  $l$ , et on note :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - l| \leq \epsilon.$$

**Remarque.** On a les synonymies suivantes :

- $u$  converge vers  $l$ ,
- $u$  admet pour limite  $l$ ,
- $u$  tends vers  $l$ ,
- $u_n$  tends (ou converge) vers  $l$  lorsque  $n$  tends vers  $+\infty$ .

**Exemple 2.** Représentation de la définition à noter.

**Exemple 3.** (i) Montrons que  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

(ii) Montrons que  $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Remarque.** En pratique, il faut être à l'aise avec les passages courants suivants :

**Proposition 4.** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $l$  un réel. Alors :

$$(i) \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$(ii) \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$(iii) \quad \text{Par conséquent : } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Remarque.** Interprétation de (iii) à noter.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 5.** Montrons que  $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 6.** (" Proposition HP ", raisonnement à savoir retrouver). Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Supposons qu'il existe un réel  $l > 0$  tel que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l.$$

Montrer que  $u$  est strictement positive à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > 0.$$

**b) Suite admettant une limite infinie**

**Définition 7.** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

(i) On dit que  $u$  admet pour limite  $+\infty$ , ou que  $u$  tend vers  $+\infty$ , et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > A.$$

(ii) On dit que  $u$  admet pour limite  $-\infty$ , ou que  $u$  tend vers  $-\infty$ , et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n < A.$$

**Exemple 8.** (i) Montrons que  $n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

(ii) Montrons que  $2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**c) Premières propriétés des limites**

**Définition 9.** On dit qu'une suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, ou est convergente, si  $u$  admet une limite finie, autrement dit s'il existe un réel  $l$  tel que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l.$$

Dans ce cas, on dit que  $u$  converge vers  $l$ .

Si non, on dit que  $u$  diverge. Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), on dit que  $u$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

**Remarque.** Attention, les notions de convergence et de divergence s'appliquent à un objet de type "suite". Pour dire

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

on peut donc dire que  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0. Autre exemple :  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, vers  $+\infty$ .

**Remarque.** Les suites n'admettant pas de limites sont donc dites divergentes.

**Remarque.** Étudier la nature d'une suite, c'est déterminer son éventuelle limite ou prouver qu'elle n'en admet pas.

Voici le premier point, trivial mais nécessaire.

**Proposition 10.** Toute suite constante converge vers la valeur de cette constance. Autrement dit, pour tout réel  $c$  :

$$c \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

On peut également de suite démontrer que :

**Proposition 11.** (i) Toute suite convergente est bornée.  
 (ii) Toute suite qui diverge vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  est non bornée.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

Le premier point crucial est le suivant.

**Théorème 12. (Unicité de la limite d'une suite)** *La limite d'une suite, si elle existe, est unique. Autrement dit, pour toute suite réelle  $u$  et pour tous  $l$  et  $l'$  éléments de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si :*

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \text{ et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l',$$

alors  $l = l'$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque. Notation :** Soit  $u$  une suite réelle, et  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ , on dit que  $l$  est **la** limite de  $u$  et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

D'après le théorème d'unicité ci-dessus, cette terminologie et cette notation sont légitimes.

**Attention,** la notation  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  n'est bien définie que si l'on a déjà démontré que  $u$  a une limite (finie ou infinie). **Utiliser cette notation sans avoir montré l'existence d'une limite pour  $u$  est une faute.**

## 2. Opérations et limites

### a) Additions, multiplications

**Proposition 13.** *Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles admettant une limite. Notons*

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ et } l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Alors :

(i) Dans les sous-cas du tableau suivant non notés F.I. (pour "forme indéterminée"), la suite  $(u_n + v_n)_n$  admet une limite donnée par la valeur indiquée.

	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = -\infty$	$l' = +\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$l = +\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

(ii) Dans les sous-cas du tableau suivant non notés F.I. (pour "forme indéterminée"), la suite  $(u_n v_n)_n$  admet une limite donnée par la valeur indiquée.

	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l' = 0$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = -\infty$	$l' = +\infty$
$l \in \mathbb{R}_-^*$	$ll'$	0	$ll'$	$+\infty$	$-\infty$
$l = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$l \in \mathbb{R}_+^*$	$ll'$	0	$ll'$	$-\infty$	$+\infty$
$l = -\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(iii) En particulier, si  $u$  et  $v$  convergent respectivement vers  $l$  et  $l'$ , alors les suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et admettent pour limites respectives  $l + l'$  et  $ll'$ .

**Démonstration.** Démontrons certains points.  $\square$

**Remarque.** En particulier, en appliquant l'énoncé ci-dessus avec une suite constante  $v = (\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\lambda$  est réel, on peut dans certains cas déduire la limite de  $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou de  $(\lambda + u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de l'éventuelle limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exemple 14.** (i) Déterminons la limite de  $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(ii) Montrons la convergence de  $((1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(iii) Montrons que  $(\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminons sa limite.

**b) Division**

**Proposition 15.** Soit  $u$  une suite réelle. Supposons tous les termes de  $u$  non nuls à partir d'un certain rang (de sorte que  $(\frac{1}{u_n})_n$  soit définie à partir d'un certain rang).  
 Supposons que  $u$  admet une limite, et notons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

(i) Si  $l \in \mathbb{R}^*$ , alors :

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}.$$

(ii) Si  $l = -\infty$  ou  $l = +\infty$ , alors :

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(iii) Si  $l = 0$ , on ne peut rien dire en général.

(iv) Si  $l = 0$  et si  $u$  est (strictement) positive à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

(v) Si  $l = 0$  et si  $u$  est (strictement) négative à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

**Démonstration.** Montrons l'un de ces énoncés.  $\square$

**Remarque.** Cet énoncé permet, avec la règle pour le produit, de traiter des suites données sous la forme d'un quotient  $(\frac{v_n}{u_n})_n$ .

**Exemple 16.** (i) Quelle est la limite de  $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?

(ii) Montrons l'existence de, et déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 - (\frac{1}{2})^n}$ .

Plus généralement, ces énoncés permettent déjà d'établir les limites classiques suivantes.

**Proposition 17.** Soit  $k$  un entier relatif.

(i) Si  $k > 0$ , alors  $n^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

(ii) Si  $k < 0$ , alors  $n^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

(iii) si  $k = 0$ , alors  $(n^k)_n$  est constante de valeur 1 et donc  $n^0 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**c) Passage à la limite des inégalités**

**Proposition 18.** Soient  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On suppose que " $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang", c'est à dire :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq v_n.$$

Si les suites  $u$  et  $v$  convergent, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

**Remarque.** Attention, cet énoncé ne s'applique **que pour des suites convergentes**, c'est-à-dire avec une limite *finie*. On verra plus tard un théorème dit "de comparaison" pour aller plus loin.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque. Attention,** l'énoncé similaire où l'on a pris des inégalité strictes **est faux**. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} < 1$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Moralité : en présence d'inégalités strictes, on applique la proposition 17 en ne conservant que l'inégalité large, et on ne peut conclure qu'à une inégalité large.

**Exemple 19.** Montrons que pour tout réel  $x$  :

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}^*, x < 1 + \frac{1}{n} \right) \implies x \leq 1.$$

Exercice : en déduire  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ 0, 1 + \frac{1}{n} \right[ = [0, 1]$

#### d) Composition

Cet énoncé est un avant goût d'un résultat lié à la continuité des fonctions. Plus tard, on dira que les fonctions exponentielle, logarithme et racine carrée sont continues. Pour l'instant :

**Proposition 20.** Soit  $u$  une suite réelle. Supposons que :  $u$  admet une limite  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

(i) Si  $l \in \mathbb{R}$ , alors :

$$e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^l.$$

Si de plus  $l \geq 0$  et  $u$  est positive à partir d'un certain rang, alors :

$$\sqrt{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{l}.$$

Enfin, si  $l > 0$  alors  $u$  est strictement positive à partir d'un certain rang et :

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(l).$$

(ii) Si  $l = +\infty$ , alors  $u$  est strictement positive à partir d'un certain rang et :

$$e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty, \ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } \sqrt{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

(iii) Si  $l = -\infty$ , alors  $e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Démonstration.** Résultat admis (nécessite la continuité).  $\square$

**Exemple 21.** Déterminons, sous réserve d'existence :

(i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - n + 1}$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

(iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2 + \frac{1}{n}}$ .

**Exercice 22.** Déterminer la limite de  $\left( \frac{\ln(n^2) + 1}{1 - \frac{1}{3^n}} \right)_{n \geq 1}$ .

Plus généralement, en conséquence de cette proposition, on peut composer par une fonction puissance généralisée.

**Proposition 23.** Soit  $\alpha > 0$  un réel, et  $u$  une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang.

Si  $u$  admet une limite finie  $l$ , alors  $l \geq 0$  et :

$$u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l^\alpha$$

où l'on a posé  $0^\alpha = 0$ .

Si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors  $u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** Une suite positive à partir d'un certain rang ne peut pas tendre vers un réel strictement négatif, ou  $-\infty$ , comme on peut le voir par passage à la limite des inégalités.

**Exercice 24.** Démontrer la remarque ci-dessus.

**Remarque.** On peut, à l'aide de cette dernière proposition, également déterminer (sous réserve d'existence)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha$  à partir de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  dans le cas  $\alpha < 0$  en écrivant pour tout  $n$  convenable :

$u_n^\alpha = \frac{1}{u_n^{-\alpha}}$  (utiliser la proposition précédente, et la proposition concernant le passage à l'inverse).

## II. Limites classiques, formes indéterminées.

### 1. Puissances

On a déjà vu les limites des suites de la forme  $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $k$  est un entier relatif. On généralise cela facilement pour les puissances généralisées.

**Proposition 25.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors,

$$n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la proposition 23, en prenant la suite  $u = (n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour la première limite, et en passant à l'inverse pour la seconde.  $\square$

**Exemple 26.**  $n^{\frac{7}{8}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Il faut être à l'aise avec cette proposition, par exemple pour les passages comme :

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ et } n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### 2. Logarithme, exponentielle

On l'a en fait déjà vu dans la proposition sur la composition :

**Proposition 27.**  $e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

### 3. Suites géométriques

**Proposition 28.** Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

- (i) Si  $|q| < 1$ , alors  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- (ii) Si  $q > 1$ , alors  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- (iii) Si  $q = 1$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = 1$  donc  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
- (iv) Si  $q \leq -1$ , alors  $(q^n)_n$  n'admet pas de limite.

**Démonstration.** (i) et (ii) : À noter.  $\square$

**Remarque.** Nous démontrerons plus tard le dernier point pour illustrer une méthode.

**Exemple 29.** Déterminons, sous réserve d'existence,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n e^k$ .

### 4. Le théorème de croissance comparée

Le théorème ci-dessous permet de lever certaines formes indéterminées.

Ce théorème admis permet de "comparer" les croissances des suites exponentielles (on retrouve exactement les suites géométriques), des suites logarithmiques, et des suites définies à l'aide d'une puissance de  $n$  (on parlera de croissance "polynômiale").

**Moralité à retenir :** Croissance logarithmique  $<$  croissance polynômiale  $<$  croissance exponentielle.

Mais pour écrire quelque chose de correcte, vous ne pouvez qu'appliquer le :

**Théorème 30. (de croissance comparée).** Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trois réels strictement positifs. Alors :

- (i)  $\frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{n^\beta}{\ln(n)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- (ii)  $\frac{n^\beta}{e^{\gamma n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{e^{\gamma n}}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Démonstration.** Faisable, un peu longue, et admise par le programme officiel.  $\square$

**Remarque. Attention,** ce théorème intervient très souvent, sous plusieurs variantes. Il faut être à l'aise avec!

**Remarque.** Si vous aimez les proverbes :

- (i) : "la croissance polynômiale impose sa limite sur la croissance logarithmique"
- (ii) : "La croissance exponentielle (ou géométrique, voir ci-dessous) impose sa limite sur la croissance polynômiale".

**Remarque.** Ces énoncés, donnés par 2, se répètent : on passe de l'un à l'autre par passage à l'inverse.

**Remarque.** On parle plutôt de croissance géométrique que de croissance exponentielle, car à partir du cas (ii), on peut lever des indéterminations comme pour l'étude de la limite de  $(\frac{n^2}{3^n})_n$ . Voici ce que cela donne :

**Proposition 31.** Soit  $\alpha > 0$  et  $q > 1$ . Alors,

$$\frac{n^\alpha}{q^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{q^n}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 32.** Levons les formes indéterminées apparaissant dans l'étude de la limite de la suite de terme général  $u_n$  donné par :

(i)  $\frac{n^5}{3 \ln(n)}$ .

(ii)  $0,5^n n$ .

(iii)  $\frac{e^{2n}}{n\sqrt{n}}$ .

Attention à bien appliquer ce théorème et sa conclusion ci-dessus.

**Remarque.** Et, peut on dire, en conséquence, que "croissance logarithmique < croissance exponentielle"? La réponse est oui :

**Exemple 33.** Montrons l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^3}{e^n}$  et calculons cette limite.

Vous pourrez utiliser cette conséquence:

**Proposition 34.** Soient  $\alpha, \beta$  des réels strictement positifs. Alors,

$$\frac{\ln(n)^\alpha}{e^{\beta n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{e^{\beta n}}{\ln(n)^\alpha} \xrightarrow{+\rightarrow +\infty} \infty.$$

**Démonstration.** Un cas à noter.  $\square$

## 5. Levée des formes indéterminées : un principe général

Voici deux techniques classiques pour lever des formes indéterminées.

### a) À utiliser très souvent : la factorisation

Cette méthode a un aspect théorique en 2e année avec la notion de *suites équivalentes*. En pratique, cela reviendra à faire les opérations suggérées par les idées ci-dessous.

**Méthode (idée de méthode) :**

- (i) Pour lever une forme indéterminée dans une somme, on identifie le terme "imposant sa croissance aux autres" (ou "le plus grand") et on factorise par celui-ci. On conclut alors par croissance comparée.
- (ii) Dans un quotient/un produit de telles sommes, la première étape permet souvent de conclure par croissance comparée.

**Exemple 35.** (i) Cherchons la limite de la suite  $u$  donnée par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n^5 - 8n - 1$ .

(ii) Même question pour  $u_n = n^2 - 3 \ln(n)$ , puis pour  $v_n = n^5 - \ln(n) - 2^n$ .

(iii) Même question pour  $u_n = \frac{2^n + 3^n - n}{5^n + \ln(n)}$ .

**Remarque.** Vous avez bien appliqué la première étape si vous remarquez une "parenthèse qui tend vers 1".

**Exercice 36.** Déterminer la limite de  $\frac{5^n + e^n - n}{n \ln(n) + n^2 - n}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**b) Pour gérer des racines carrées, la quantité conjuguée**

En plus de la quantité conjuguée, la méthode décrite ci-dessus doit être toujours en tête.

**Exemple 37.** Déterminer les limites des suites de terme général  $u_n$  donné par :

$$(i) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$(ii) u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}.$$

**III. Théorèmes d'existence de limites****1. Le théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes**

**Théorème 38. (des gendarmes)** Soient  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles. On suppose :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, v_n \leq u_n \leq w_n$$

On suppose de plus que  $v$  et  $w$  convergent vers un même réel  $l$ .  
Alors,  $u$  converge vers  $l$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 39.** Déterminons la limite des suites  $u$  données par :

$$(i) u_n = \frac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}.$$

(ii)  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ . On utilisera l'inégalité suivante, démontrée à l'aide d'une étude de fonction classique :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Un corollaire classique :

**Proposition 40.** Soit  $u$  une suite bornée, et  $v$  une suite telle que

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors,

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** Ce résultat est à la limite du programme : vous devez refaire sa démonstration pour l'utiliser (éventuellement avec les données de l'exercice).

Voici un énoncé similaire pour les limites infinies :

**Théorème 41. (de comparaison)** Soient  $u$  et  $v$  deux suites telle que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq v_n.$$

Alors :

$$(i) \text{ Si } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ alors } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$(ii) \text{ Si } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty, \text{ alors } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 42.** Montrons que  $n! \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**Exemple 43. classique chez les classiques**

(i) Montrer que  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

(ii) En déduire la limite classique à connaître :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

## 2. Le théorème de la limite monotone

**Théorème 44. (de la limite monotone)** Soit  $u$  une suite réelle.

(i) Supposons  $u$  croissante. Alors :

(a)  $u$  converge si et seulement si  $u$  est majorée. Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k.$$

(b) Si  $u$  n'est pas majorée, alors  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

(ii) Supposons  $u$  décroissante. Alors :

(a)  $u$  converge si et seulement si  $u$  est minorée. Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \leq u_n.$$

(b) Si  $u$  n'est pas minorée, alors  $u$  diverge vers  $-\infty$ .

**Démonstration.** À noter, en admettant l'existence d'un plus petit majorant de  $u$  pour le premier cas.  $\square$

**Remarque.** Une suite croissante (resp. décroissante) est toujours minorée (resp. majorée), par son premier terme. Donc une suite **croissante** est majorée si et seulement si elle est bornée, si et seulement si elle converge, d'après ce théorème (et on a un énoncé similaire pour les suites décroissantes).

**Exemple 45. (classique)**

(i) Montrer  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)}$ .

(ii) Faire apparaître une somme télescopique dans le membre de droite. Qu'en déduire?

(iii) En déduire que la suite  $u$  donnée par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  (pour  $n \geq 1$ ) converge.

**Culture générale :** cette limite vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ , et les démonstrations de ce résultat ne sont pas simples.

## 3. Le théorème des suites adjacentes

**Définition 46.** On dit que deux suites réelles  $u$  et  $v$  sont *adjacentes* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i)  $u$  est croissante et  $v$  est décroissante, ou bien  $v$  est croissante et  $u$  est décroissante,

(ii)  $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Montrer que deux suites sont adjacentes permet de montrer leurs convergences.

**Théorème 47.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites telles que :

(i)  $u$  est croissante,  $v$  est décroissante, et

(ii)  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Alors,  $u$  et  $v$  sont convergentes de même limite, et si l'on note  $l$  cette limite commune :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n.$$

**Remarque.** Si les suites  $u$  et  $v$  sont indexées par autre chose que  $\mathbb{N}$ , on adapte juste le dernier point du théorème.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 48.** Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ . Montrons que  $u$  et  $v$  convergent.

#### 4. Utilisation des sous-suites de rangs pairs et impairs

Voilà enfin une proposition permettant de ramener l'étude asymptotique d'une suite  $u$  à l'étude des suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$ .

Ce sont les suites obtenues en ne gardant qu'un terme sur deux de la suite  $u$ .

**Théorème 49.** Soit  $u$  une suite réelle, et  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Posons, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ . Alors, il est équivalent de dire :

(i)  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ , et

(ii)  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  et  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

Autrement dit,  $u$  tend vers  $l$  ssi les deux suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  tendent vers  $l$ .

**Démonstration.** Admis.  $\square$

Très souvent, on utilise ce théorème pour démontrer l'existence d'une limite à l'aide au théorème des suites adjacentes. On montre alors que les sous-suites de rang pairs et impairs sont adjacentes.

**Exemple 50.** Montrons, à l'aide de ce théorème, que la suite  $u$  donnée par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$  converge.

On peut aussi utiliser ce théorème pour montrer rapidement que certaines suites n'ont pas de limites.

**Exemple 51.** Montrons que si  $q \leq -1$ , alors  $(q^n)_n$  n'admet pas de limite.

## IV. Annexe : Démonstrations

### Démonstration du théorème 44

*Théorème 44 : Soit  $u$  une suite réelle.*

(i) *Supposons  $u$  croissante. Alors :*

(a)  *$u$  converge si et seulement si  $u$  est majorée. Dans ce cas :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

(b) *Si  $u$  n'est pas majorée, alors  $u$  diverge vers  $+\infty$ .*

(ii) *Supposons  $u$  décroissante. Alors :*

(a)  *$u$  converge si et seulement si  $u$  est minorée. Dans ce cas :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq u_n.$$

(b) *Si  $u$  n'est pas minorée, alors  $u$  diverge vers  $-\infty$ .*

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

(i) Supposons  $u$  croissante. Montrons les points (a) et (b) du théorème.

(a) Si  $u$  converge, alors  $u$  est bornée en tant que suite convergente. Il s'agit donc de montrer que réciproquement, si  $u$  est majorée alors  $u$  converge, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Supposons donc  $u$  majorée.

**On admet** l'existence d'un plus petit majorant de la suite  $u$ , c'est à dire d'un réel  $M$  (que l'on fixe et qui est en fait unique) tel que :

- $M$  est un majorant de  $u$  et,
- Tout réel  $M'$  tel que  $M' < M$  ne majore pas  $u$ .

*Pour démontrer ce résultat, il faudrait se plonger davantage dans la définition de l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels...*

On va montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M$ .

Soit  $\epsilon > 0$ .

$M - \epsilon < M$  donc,  $M$  étant le plus petit majorant de  $u$ ,  $M - \epsilon$  ne majore pas  $u$ .

Ainsi, on dispose d'un entier  $N_0$  tel que  $M - \epsilon < u_{N_0}$ .

Soit  $n \geq N_0$ .

Alors, par croissance de  $u$  :  $u_{N_0} \leq u_n$ .

De plus,  $M$  majore  $u$  donc :  $u_n \leq M$ .

Finalement :  $M - \epsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq M < M + \epsilon$ .

Par transitivité :  $M - \epsilon < u_n < M + \epsilon$ .

Donc  $|u_n - M| < \epsilon$ , et ce pour tout  $n \geq N_0$ .

On a donc bien montré, pour tout  $\epsilon > 0$ :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - M| < \epsilon.$$

Donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M : u$  converge. Enfin,  $M$  étant un majorant de  $u$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = M.$$

Ceci démontre bien le point (a) du théorème.

(b) Supposons maintenant  $u$  non majorée et montrons que  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}$ .  $u$  étant non majorée,  $A$  ne majore pas  $u$  donc on dispose d'un entier  $N_0$  tel que  $u_{N_0} > A$ .

Alors, par croissance de  $u$  :

$$\forall n \geq N_0, u_n \geq u_{N_0} > A.$$

On a donc montré :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > A.$$

Ceci étant vrai pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , on a montré :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

D'où (b).

(ii) Supposons  $u$  décroissante, et posons  $v_n = -u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ , donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, -u_n \leq -u_{n+1}$ .

Ainsi,  $v = (v_n)_n$  est croissante.

Montrons les points a) et b) de ce second cas.

(a) Supposons  $u$  minorée et montrons que  $u$  converge et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \leq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$u$  est minorée : soit  $m$  un minorant de  $u$ . Alors,  $-m$  est un majorant de  $v$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq u_n$  donc  $-m \geq v_n$ ).

$v$  étant croissante et majorée, elle converge d'après le premier cas de ce théorème, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k.$$

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -v_n$  et  $v$  converge donc par produit :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} - \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,  $u$  converge. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k$  donc  $-v_n \geq - \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k$  d'où  $u_n \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ .

(b) Si  $u$  n'est pas minorée, alors  $v$  n'est pas majorée. Étant croissante,  $v$  diverge vers  $+\infty$  d'après le premier cas. Donc  $u = (-v_n)_n$  diverge vers  $-\infty$  par produit.

### Démonstration du théorème 47

*Théorème 47. Soient  $u$  et  $v$  deux suites telles que :*

(i)  $u$  est croissante,  $v$  est décroissante, et

(ii)  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

*Alors,  $u$  et  $v$  sont convergentes de même limite, et si l'on note  $l$  cette limite commune :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n.$$

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé.

Montrons d'abord :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$ , fixons un tel entier  $n_0$ .

Par croissance de  $u$  et décroissance de  $v$ , on aurait alors :

$$\forall n \geq n_0, \begin{cases} u_n \geq u_{n_0} \\ v_n \leq v_{n_0} \end{cases}, \text{ donc : } \forall n \geq n_0, \begin{cases} u_n \geq u_{n_0} \\ -v_n \geq -v_{n_0} \end{cases}.$$

Par somme d'inégalités :

$$\forall n \geq n_0, u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}.$$

Or, par hypothèse,  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et en tant que suite constante :  $u_{n_0} - v_{n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_{n_0} - v_{n_0}$ .

Par passage à la limite des inégalités, on aurait donc :

$$0 \geq u_{n_0} - v_{n_0}.$$

C'est absurde, car on aurait alors  $0 \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ , donc  $0 > 0$ .

On a donc bien montré :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ .

$u$  est croissante donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$ .  $v$  étant décroissante,  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On a montré :  $u_n \leq v_n$  donc :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Par transitivité :  $u_0 \leq v_n$  et  $u_n \leq v_0$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi,  $u$  est majorée (par  $v_0$ ) et  $v$  est minorée (par  $u_0$ ).  $u$  étant croissante et majorée, elle converge par le théorème de la limite monotone. Notons  $l$  sa limite, on sait de plus :  $u_n \leq l$  pour tout  $n$ .

$v$  étant décroissante et minorée, elle converge par limite monotone. Notons  $l'$  sa limite, on sait également  $l' \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par opérations :  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l - l'$ .

Mais  $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par hypothèse. Par unicité de la limite d'une suite :  $l - l' = 0$ .

Donc  $l = l'$ .

Ainsi,  $u$  et  $v$  sont convergentes et de même limite  $l$ , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l = l' \leq v_n.$$