

Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Notion de fonction réelle de la variable réelle.

1. Définition

Définition 1. Une fonction réelle de la variable réelle f est la donnée :

- (i) d'une partie \mathcal{D}_f de \mathbb{R} appelée *ensemble de définition* de f , et
- (ii) pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, d'un réel $f(x)$ appelé *image* de x par la fonction f .

On note alors $f : \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$.

Remarque. On parlera de "fonction réelle" plutôt que de la formule plus longue de "fonction réelle de la variable réelle".

Remarque. On définira la notion plus générale d'*application* dans le chapitre "Ensembles et applications".

Remarque. " $\begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ " se lit : "la fonction de \mathcal{D}_f vers \mathbb{R} qui à x associe $f(x)$ ".

Remarque. Remarquez que les flèches ne sont pas typographiées de la même manière, c'est important. " $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ " se lit "la fonction f , de \mathcal{D}_f vers \mathbb{R} ", alors que " $f : x \mapsto x^2$ " se lit "la fonction f , qui à x associe x^2 ".

Remarque. En général, l'image $f(x)$ d'un réel $x \in \mathcal{D}_f$ est donné par une formule, mais la seule chose qui importe est qu'il soit bien défini de manière unique pour chaque tel x .

Remarque. Le grand trait vertical n'est pas obligatoire, mais indique que les deux lignes écrites sont à considérer sur la même ligne de texte.

Exemple 1. La fonction réelle $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est donnée par : son ensemble de définition \mathbb{R} , et, pour tout réel x , son image qui est ici le réel x^2 . En donnant une formule, on donne un réel (ici, x^2) pour chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 2. La fonction réelle $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$ admet \mathbb{R} pour ensemble de définition.

L'image d'un réel x est x si celui-ci est positif, et $-x$ sinon. Autrement dit, vous connaissez déjà cette fonction, il s'agit de la fonction :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$$

qu'on appelle la fonction valeur absolue.

Remarque. Pour définir et nommer une fonction réelle, on peut écrire par exemple : " Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ ". Pour pouvoir faire cela, il faut que le réel donné comme image, ici \sqrt{x} , soit bien défini et de manière unique pour tout x du domaine de définition. On dit alors que la fonction est *bien*

définie.

Comprenez que si vous écrivez $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$, vous commettez une faute (la fonction n'est pas bien définie car $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens, et -1 est un élément du domaine de définition donné).

Remarque. Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R} . On note $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions réelles de \mathcal{D} vers \mathbb{R} . Par exemple, la fonction valeur absolue est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et la fonction racine carré appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$.

Définition 2. Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$. On dit que x est un antécédent de y par f si $f(x) = y$.

Exemple 3. On a $(-2)^2 = 4$ donc -2 est un antécédent de 4 par la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Définition 3. Soit r un réel. On appelle *fonction constante de valeur r* (ou fonction constante égale à r) la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & r \end{array} \right.$. La fonction constante égale à 0 est appelée *la fonction nulle*.

Remarque. On note souvent \bar{r} la fonction constante égale à r , mais on doit introduire la notation ("Soit \bar{r} la fonction constante égale à r ") car cette barre est utilisée dans d'autres contextes.

2. Fonctions données par une formule.

On peut se donner une fonction en donnant simplement une formule, c'est à dire une expression donnant les images des réels. Exemple :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction donnée par } f(x) = \sqrt{x-1}.$$

Par contre, à ce stade la définition de f est incomplète car le domaine de définition n'est pas donné. Ainsi, dans ce cas, *la première chose à faire est toujours de déterminer le domaine de définition sous-entendu pour f .*

Ce domaine de définition à déterminer est alors l'ensemble des réels x tels que l'expression donnée soit bien définie. Aucun mot de l'exemple ci-dessous n'est inutile (à part, peut être, le "réel" entre parenthèse).

Exemple 4. Considérons la fonction (réelle) f donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminons le domaine de définition de f . Pour tout réel x , l'expression $\sqrt{x-1}$ est bien définie si et seulement si $x-1 \geq 0$. Or :

$$x-1 \geq 0 \iff x \geq 1.$$

La fonction f est donc définie sur $[1, +\infty[$.

Remarque. Pour mener à bien ce moment, vous devez donc avoir bien en tête les "opérations interdites", comme pour les domaines des équations et inéquations.

Remarque. La notion lycéenne d'opération interdite va maintenant prendre un autre sens. On dira plutôt : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur \mathbb{R}_+ (d'après le cours) donc $\sqrt{x-1}$ est bien défini si et seulement si $x-1 \in \mathbb{R}_+$ (dans le contexte ci-dessus).

Exemple 5. La fonction f donnée par $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Exemple 6. La formule $g(x) = \ln(1-x)$ définit une fonction g sur $] -\infty, 1[$.

Exemple 7. Déterminons le domaine de définition de la fonction donnée par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Exercice 1. Donner le domaine de définition de la fonction réelle f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1})$.

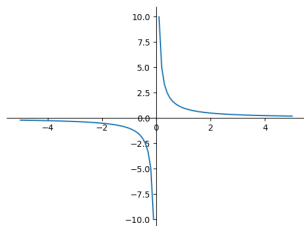
3. Graphe d'une fonction.

Définition 4. Soit f une fonction réelle. Notons \mathcal{D}_f son domaine de définition. On appelle *graphe de la fonction* f la partie de \mathbb{R}^2 donnée par :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}.$$

Remarque. Γ_f est donc l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = y$.

On peut alors représenter graphiquement une fonction. Dans un repère représentant \mathbb{R}^2 , l'ensemble des points du graphe Γ_f d'une fonction f forment ce qu'on appelle une courbe. Voici par exemple la représentation graphique de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$.



II. Quelques propriétés des fonctions réelles.

Les propriétés des fonctions réelles peuvent "ne pas être globales", mais localisées par exemple sur un intervalle. Par exemple, la fonction (donnée par) $x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante sur \mathbb{R} , mais elle est croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- . On utilisera donc le vocabulaire suivant:

Définition 5. Soit f une fonction réelle. Notons \mathcal{D} son domaine de définition.

- (i) Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que f est *définie en* x si $x \in \mathcal{D}$.
Autrement dit, f est définie en x si $f(x)$ est un réel bien défini.
- (ii) Soit I une partie de \mathbb{R} . On dit que f est *définie sur* I si $I \subset \mathcal{D}$.
Autrement dit, on dit que f est définie sur I si $f(x)$ est un réel bien défini pour tout $x \in I$, ou de manière équivalente, si f est définie en x pour tout $x \in I$.

Exemple 8. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet \mathbb{R}^* comme domaine de définition. Cette fonction est définie sur \mathbb{R}_+ , sur \mathbb{R}_- mais pas sur \mathbb{R} , car f n'est pas définie en 0.

Remarque. Remarquez l'utilisation de la préposition "en" lorsque l'on parle des points (de réels auxquels on peut potentiellement appliquer f), et "sur" lorsque l'on parle d'ensembles de points. C'est très général.

1. Fonctions monotones, lien avec les équations et d'inéquations

Remarque. Cette partie est subtile et très utilisée dans l'année. Insistez jusqu'à bien comprendre l'enchaînement des énoncés (définitions, propositions, méthodes...).

a) Fonctions monotones et strictement monotones

Dans cette partie, on travaillera avec un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, que vous penserez comme un intervalle. En pratique, vous appliquerez systématiquement ces résultats pour I un intervalle. Les énoncés ne supposent pas que I est un intervalle, car c'est inutile. Alors pourquoi?

Exemple 9. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet \mathbb{R}_+^* comme domaine de définition (ce n'est pas un intervalle...). Cette fonction est décroissante sur chaque intervalle \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , mais **n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^*** . En effet, $-1 \leq 1$ mais " $f(-1) \geq f(1)$ " est faux, donc la propriété de décroissance n'est pas vérifiée sur \mathbb{R}^* .

Définition 6. Soit f une fonction réelle et I une partie de \mathbb{R} .

(i) On dit que f est *croissante sur I* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

(ii) On dit que f est *décroissante sur I* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

(iii) On dit que f est *monotone sur I* si elle est croissante ou décroissante sur I .

Exemple 10. Les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes sur \mathbb{R} .

Exemple 11. La fonction donnée par $x \mapsto x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ie la fonction $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right)$, est croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- . Démontrons par exemple sa décroissance sur \mathbb{R}_- .

Remarque. Si on ne précise pas de partie I de \mathbb{R} quand on parle de fonction monotone, il est sous-entendu : monotone sur tout son ensemble de définition. On peut donc dire que la fonction racine carré est croissante (sous entendu, sur son domaine \mathbb{R}_+), mais habituez-vous plutôt à toujours préciser "le lieu" de croissance.

Définition 7. Soit f une fonction réelle et I une partie de \mathbb{R} .

(i) On dit que f est *strictement croissante sur I* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y).$$

(ii) On dit que f est *strictement décroissante sur I* si :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y).$$

(iii) On dit que f est *strictement monotone sur I* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

Exemple 12. La majorité de vos "fonctions usuelles" monotones sont strictement monotones. Par contre, il y a une exception notable : **la fonction partie entière** est croissante sans être strictement croissante (voir plus bas).

Proposition 1. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Toute fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I est croissante (resp. décroissante) sur I .

Démonstration. À noter. \square

Intéressons nous maintenant aux implications réciproques de celles données dans les définitions ci-dessus.

Proposition 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

(i) Si f est croissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) < f(y) \implies x < y.$$

(ii) Si f est décroissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) < f(y) \implies x > y.$$

Démonstration. À noter. \square

Remarque. Ici, on ne fait que l'hypothèse que f est monotone, mais on ne peut pas conclure au même résultat avec des inégalités larges. Par exemple, prenons pour f la fonction nulle. Elle est bien croissante (et aussi décroissante). L'inégalité

$$f(x) \leq f(y)$$

est vraie pour tous réels x et y (car il y a égalité). L'énoncé

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y.$$

est donc faux (prendre $x = 1$ et $y = -1$ comme contre exemple).

Par contre, pour les fonctions strictement monotones, tout se passe pour le mieux.

Proposition 3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

(i) Si f est strictement croissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \leq y.$$

(ii) Si f est strictement décroissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) \leq f(y) \implies x \geq y.$$

Démonstration. À noter. \square

La conclusion (majeure) de tous ces énoncés, pour les fonctions strictement monotones, est alors la suivante. Tout se passe pour le mieux.

Proposition 4. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

(i) Si f est strictement croissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

et :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \iff f(x) < f(y)$$

(ii) Si f est strictement décroissante sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

et :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \iff f(x) > f(y)$$

Démonstration. À noter. \square

b) Utilisation pour la résolution d'inéquations

Méthode : Dans le cadre de la résolution d'une inéquation, on peut appliquer une fonction monotone sur un intervalle convenable à une inégalité et...

- obtenir une inégalité équivalente si la fonction appliquée est strictement monotone (prop. 4)
- obtenir une condition nécessaire si la fonction appliquée n'est que monotone (définition de la monotonie).

De plus, la proposition 2 peut être utilisée, mais c'est beaucoup plus rare.

Exemple 13. Résolution de $e^{x+1} > 1$, avec la proposition 4.

Remarque. Quand on utilise la proposition 4 pour établir une équivalence type :

$$a \leq b \iff f(a) \leq f(b),$$

il en faut pas oublier d'argumenter en :

- (i) Trouvant un intervalle I sur lequel la fonction appliquée f est strictement monotone, puis
- (ii) vérifiant que $a \in I$ et $b \in I$.

Voici un exemple montrant bien le problème pour les fonctions non strictement monotones.

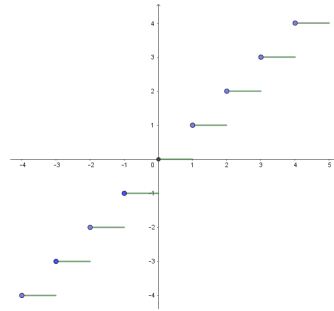
Exemple 14. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, définie sur \mathbb{R} , est croissante. Soient x et y des réels. Quels liens de causalité avons-nous entre les énoncés suivants?

(i) $x < y$

(ii) $x \leq y$

(iii) $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

(iv) $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$



c) Utilisation pour la résolution d'équations

Pour les équations, où l'on ne manipule pas des inégalités mais des égalités, il faut travailler un tout petit peu plus. L'optique est toujours la même : se permettre d'appliquer une fonction dans le cadre de la résolution d'une équation. La bonne notion est la suivante.

Définition 8. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie sur I . On dit que f est injective sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Remarque. En particulier, si f est injective sur I , alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y) \iff x = y.$$

En effet, le sens manquant (" $x = y \implies f(x) = f(y)$ ") est évident.

La notion de fonction injective est donc la bonne pour justifier, lors de la résolution d'une équation, un passage type :

$$a = b \iff f(a) = f(b).$$

La majorité du temps, on utilisera la stricte monotonie.

Proposition 5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction (définie et) strictement monotone sur I . Alors, f est injective sur I .

Démonstration. À noter. \square

Exemple 15. Résolution de l'équation $e^{x+1} = 1$.

Remarque. Comme pour les inéquations, pour justifier une application de fonction strictement monotone sur un intervalle I , on n'oubliera pas de spécifier I et de vérifier que les deux membres de l'égalité sont éléments de I .

Exemple 16. L'équivalence $-1 = 1 \iff (-1)^2 = 1^2$ est fausse. La fonction carré est strictement monotone sur \mathbb{R}_+ et sur \mathbb{R}_- , mais $(-1, 1) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(-1, 1) \in \mathbb{R}_-^2$ sont deux énoncés faux.

2. Parité, imparité d'une fonction

Les fonctions paires (resp. impaires) sont les fonctions dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine). Algébriquement, une fonction f de domaine \mathcal{D} est paire si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$, et impaire si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$. Pour qu'on ait simplement le droit d'écrire cela, il faut que $f(-x)$ soit bien défini dès que $f(x)$ l'est, d'où la définition suivante.

Définition 9. Soit D une partie de \mathbb{R} . On dit que D est symétrique par rapport à 0 (ou par rapport à l'origine) si :

$$\forall x \in D, -x \in D.$$

Exemple 17. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sont symétriques par rapport à l'origine. $]2, +\infty[$ et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ne le sont pas.

Définition 10. Soit f une fonction réelle. Notons \mathcal{D} son domaine de définition.

(i) On dit que f est *paire* si \mathcal{D} est symétrique par rapport à 0, et si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x).$$

(ii) On dit que f est *impaire* si \mathcal{D} est symétrique par rapport à 0, et si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x).$$

Remarque. "paire" : on perd le "-", "impaire" : on ne le perd pas.

Exemple 18. Les fonctions suivantes sont-elles paire ou impaire?

(i) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

(ii) $x \mapsto x^3 + 1$

(iii) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Proposition 6. (i) Soit f une fonction paire. Alors, le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \Gamma_f \iff (-x, y) \in \Gamma_f.$$

(ii) Soit f une fonction impaire. Alors, le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à l'origine :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \Gamma_f \iff (-x, -y) \in \Gamma_f.$$

Démonstration. En exercice. \square

Remarque. Faites un dessin pour vous convaincre que l'énoncé quantifié donné exprime bien une propriété de symétrie.

Voici un résultat très classique sur les fonctions paires et impaires.

Exercice 2. Par analyse synthèse, démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors il existe d'unique fonctions f_P et $f_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_P + f_I$ avec f_P paire, f_I impaire.

3. Fonctions bornées

Définition 11. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $I \subset \mathcal{D}$.

(i) On dit que f est *majorée sur I* si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Dans ce cas, on appelle *majorant de f sur I* tout réel M tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.

(ii) On dit que f est *minorée sur I* si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x).$$

Dans ce cas, on appelle *minorant de f sur I* tout réel m tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.

(iii) On dit que f est *bornée sur I* si f est à la fois majorée et minorée sur I .

Remarque. Si aucun domaine I n'est précisé (par exemple, "montrer que f est majorée"), on sous-entend que la propriété est vraie sur tout le domaine de définition de la fonction (l'exemple devient "montrer que f est majorée sur son domaine de définition").

Exemple 19. Dessins à noter.

Remarque. Attention, une fonction majorée (ou minorée) a beaucoup de majorants (ou de minorants), et pas un unique. Pour cette raison, la tournure de phrase "-1 est LE minorant de f " est fausse (on écrira toujours "-1 est UN majorant de f ").

4. Extrema

Définition 12. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}$. Soit $x_0 \in I$.

(i) On dit que f admet un *maximum* en x_0 sur I si:

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0).$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I .

(ii) On dit que f admet un *minimum* en x_0 sur I si:

$$\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x).$$

On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I .

(iii) On dit que f admet un *extremum* en x_0 sur I si elle admet un maximum ou un minimum en x_0 . Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est un *extremum* de f sur I .

Exemple 20. Quels sont les extrema de la fonction $t \rightarrow t^2$ sur \mathbb{R} ?

Remarque. Le pluriel d'extremum est "extrema".

Remarque. Un maximum (resp. minimum) de f sur I est donc un majorant (resp. un minorant) de f sur I qui est une valeur atteinte par la fonction f (ie, qui admet un antécédent par f).

Remarque. On verra aussi la notion importante d'extremum local plus tard dans l'année.

Exemple 21. Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1+x^2} \end{cases}$ est bornée sur \mathbb{R} . Admet-elle un minimum? Le démontrer. Sans démonstration, admet-elle un maximum?

Remarque. Une fonction admettant un minimum est minorée, et de même une fonction admettant un maximum est majorée. La réciproque est fausse : l'exponentielle est minorée par 0 sur \mathbb{R} mais n'admet pas de minimum.

Remarque. Encore une fois, si aucun domaine I n'est précisé, on prendra pour I l'ensemble de définition de la fonction considérée.

III. Opérations sur les fonctions réelles

1. Addition, produit, quotient et multiplication scalaire

Définition 13. Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine de définition \mathcal{D} .

(i) On appelle *somme de f et g* la fonction notée $f + g$ donnée par :

$$f + g : \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{array} .$$

(ii) On appelle *produit de f et g* la fonction notée $f \times g$ donnée par :

$$f \times g : \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)g(x) \end{array} .$$

(iii) Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur \mathcal{D} , on appelle *quotient de f par g* la fonction notée $\frac{f}{g}$ donnée par :

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} .$$

(iv) Pour tout réel λ , on appelle *multiplication scalaire de f par λ* la fonction notée $\lambda \cdot f$ donnée par :

$$\lambda \cdot f : \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array} .$$

Remarque. On manipule, par ces opérations, des fonctions et pas juste leurs images : la somme, le produit de deux fonctions donne une fonction.

Remarque. On pose, pour toute fonction f : $-f := (-1) \cdot f$ et $g - f = g + (-f)$.

Remarque. Voici la bonne manière de justifier les domaines de définition des fonctions donnés par une formule: $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$ admet pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ comme quotient de la fonction $x \mapsto x$ définie sur \mathbb{R} , par la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ définie sur \mathbb{R} s'annulant exactement en -1 et 1 . Le modèle de rédaction donné plus haut, et plus simple, est toutefois convenable.

Exemple 22. Considérons les fonctions définies sur \mathbb{R} par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Déterminons la fonction $\text{ch} + \text{sh}$.

2. Composition de fonctions

Définition 14. Soit f et g deux fonctions réelles, de domaines de définition respectifs \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g . Supposons :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_g.$$

Alors, on appelle *composée de f par g* la fonction notée $g \circ f$ donnée par :

$$g \circ f : \begin{array}{l} \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} .$$

Remarque. On retiendra facilement que (sous réserve de définition), $g \circ f(x) = g(f(x))$ car l'ordre d'écriture est le bon, mais on parle de la composée de f par g .

Remarque. Alternativement, on peut vous donner deux fonctions f et g et vous demander le *domaine de définition* de la composée $g \circ f$, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que le réel $g(f(x))$ est bien défini. Ce domaine est donné par :

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}.$$

Exemple 23. Considérons les fonctions f et g donnée par $f(x) = \frac{2}{x} + 1$ et $g(x) = \ln(x)$. Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$ de $g \circ f$.

3. Compatibilité entre les propriétés et les opérations

a) Avec les opérations algébriques

Proposition 7. f et g deux fonctions réelles de même domaine de définition.

- (i) Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes, resp. strictement), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante, resp. strictement).
- (ii) Si f et g sont paires (resp. impaires), alors $f + g$ est paire (resp. impaire).
- (iii) Si f et g sont majorées (resp. minorée, resp. bornée), alors il en est de même de $f + g$.

Démonstration. En exercice. \square

Remarque. On peut écrire beaucoup d'énoncés similaires (pour le produit, le quotient, et la multiplication scalaire), mais les apprendre par coeur n'est pas une bonne idée. Il faut mieux, à chaque fois, se poser la question, voir le retrouver dans votre cas particulier. Vous serez peu exposés aux exercices très théoriques sur ces notions. **Par contre, attention aux énoncés faux :**

Proposition 8. L'énoncé suivant est faux : "le produit de deux fonctions croissantes est croissante".

Démonstration. La fonction constante égale à -1 est croissante, la fonction $x \mapsto x$ est croissante, mais le produit $x \mapsto -x$ est strictement décroissant sur \mathbb{R} , il n'est clairement pas croissant. \square

Remarque. Le point (i) de la proposition ci-dessus peut être amélioré : si f est croissante et g strictement croissante, alors $f + g$ est strictement croissante (les hypothèses sont affaiblies, il n'est pas nécessaire que les deux fonctions soient *strictement* croissantes pour que leur somme le soit).

Exemple 24. Cette proposition permet tout de même la justification en une phrase suivante : la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme des fonctions strictement croissantes $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x + 1$.

b) Avec la composition

Cette proposition est plus importante. Dans cet énoncé, on étudie les propriétés *sur* tout le domaine de définition des fonctions envisagées.

Proposition 9. f et g deux fonctions réelles.

- (i) Si f et g sont (resp. strictement) monotones, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) monotone.
- (ii) Si f et g sont paires ou impaires, alors $g \circ f$ est paire ou impaire.
- (iii) Si g majorée (resp. minorée, resp. bornée), alors il en est de même de $g \circ f$.

Remarque. Correspondance plus précise : à noter.

Démonstration. Démonstration de certains cas à noter. \square

Exemple 25. Cette justification en une phrase est plus efficace qu'un calcul : la fonction $x \mapsto e^{x+1}$ est strictement croissante sur son domaine de définition comme composée des fonctions strictement croissantes $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto e^x$.

IV. Rappels sur la dérivation

1. Définition

Remarque. La dérivation fera l'objet de tout un chapitre au semestre 2.

Définition 15. (Partielle) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset D$.

(i) Soit $x_0 \in D$. On dit que f est **dérivable en** x_0 si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle *nombre dérivé de f en x_0* le réel $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

(ii) On dit que f est *dérivable sur* I si : pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 .

(iii) Si f est dérivable sur D , on appelle *fonction dérivée de f* la fonction notée f' donnée par :

$$f' : \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array} .$$

Remarque. Avec les notations ci-dessus, on appelle *domaine de dérivabilité de f* l'ensemble $D_{f'}$ des réels x en lesquels f est dérivable.

En fait, on note aussi f' la fonction dérivée de f sur son domaine de dérivabilité, si f n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition (ce qui étend la définition (iii)).

Remarque. Le symbole $'$ de dérivation s'applique aux fonctions, pas aux formules/réels. On nommera systématiquement nos fonctions pour les dériver.

Exemple 26. Les écritures comme $(\frac{2x}{x+1})'$ sont interdites (elles ont une "mauvaise interprétation" plus naturelle). On peut poser $f : x \mapsto \frac{2x}{x+1}$ pour étudier son domaine de dérivabilité et considérer f' .

2. Opérations et dérivée

Nous n'avons pas encore vraiment d'outils sur les limites, et la définition de la dérivée utilise ces limites. Pour contourner ce problème, vous utiliserez :

- les fonctions dérivées des "fonctions usuelles", et
- les énoncés ci-dessous, décrivant comment la dérivation se comporte avec les opérations sur les fonctions.

Attention à bien utiliser les énoncés suivants.

Proposition 10. Soit D une partie de \mathbb{R} . Soient f et g deux fonctions définies sur D .

(i) Si f et g sont dérivables sur D , alors il en est de même de $f + g$ et :

$$\forall x \in D, (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(ii) Si f et g sont dérivables sur D , alors il en est de même de $f \times g$ et :

$$\forall x \in D, (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Si g ne s'annule pas sur D , et si f et g sont dérivables sur D , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D et :

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(iv) Si f est dérivable sur D , alors pour tout réel λ , $\lambda \cdot f$ est dérivable sur D , et :

$$\forall x \in D, (\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Remarque. En particulier, pour tout x pour lequel les deux membres sont définis, on a $(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$ (pour f, g des fonctions et λ un réel). On dit que la dérivation est *linéaire*. La somme et le produit par un réel (dit scalaire) sont "transparents" pour la dérivation.

Démonstration. Second semestre. \square

Exemple 27. Déterminons la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

Pour la composition, le premier énoncé est plus précis, et le second plus facile à retenir. :

Proposition 11. Soient f et g deux fonctions réelles.

(i) Soit x un réel. Supposons que :

- f est définie et dérivable en x , et
- g est définie et dérivable en $f(x)$.

Alors, $g \circ f$ est (définie et) dérivable en x , et :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

(ii) Si f et g sont dérivables sur leurs domaines de définition, alors $g \circ f$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$, et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f}, (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Démonstration. Voir S2. \square

Dans la majorité des cas, l'utilisation de cette proposition est assez simple.

Exemple 28. Déterminons le domaine de dérivabilité, et la dérivée, de $f : t \mapsto e^{t^2-1}$

Par contre, certaines fonctions ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition, et il faut faire attention quand elles sont utilisées.

Exemple 29. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \sqrt{t-1}$.

Exemple 30. Soit u une fonction réelle dérivable sur son domaine de définition D . Vous devez bien avoir en tête les compositions classiques suivantes :

(i) La fonction $e^u : t \mapsto e^{u(t)}$ est (définie et) dérivable sur D , et

$$\forall x \in D, (e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

(ii) La fonction $\ln(u) : t \mapsto \ln(u(t))$ est dérivable sur son domaine de définition $\{x \in D | u(x) > 0\}$, et

$$\forall x \in D, (\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

(iii) La fonction $\sqrt{u} : t \mapsto \sqrt{u(t)}$ est définie sur $\{x \in D | u(x) \geq 0\}$ et dérivable sur $D' = \{x \in D | u(x) > 0\}$, et

$$\forall x \in D', (\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

3. Dérivée et monotonie

Vous connaissez déjà sûrement ces énoncés classiques, mais faites attention aux hypothèses très importantes qu'on ajoute : ici, I doit être un intervalle. Et il devra en plus être ouvert dans le le paragraphe suivant.

Proposition 12. Soit $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle et I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}$. On suppose f dérivable sur I . Alors :

- (i) f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- (ii) f est décroissante sur I ssi : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- (iii) f est une fonction constante sur I ssi $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration. S2 \square

Remarque. I doit être un intervalle : pensez à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Généralement, c'est la *stricte* monotonie qui nous intéresse (pour les équations et inéquations par exemple). L'énoncé correspondant est plus compliqué, par exemple on perd l'équivalence.

Remarque. On dit qu'une fonction g s'annule en $x \in \mathbb{R}$ si $g(x) = 0$. Si de plus g est définie sur un intervalle I , on dit que g s'annule sur I s'il existe $x \in I$ tel que $g(x) = 0$.

Proposition 13. Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I .

- (i) Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et si f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- (ii) Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ et si f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration. S2 \square

Remarque. " f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I " signifie que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet un nombre fini de solutions. C'est souvent le cas, mais c'est faux pour les fonctions constantes par exemple (leur dérivée est nulle en tout point).

Remarque. Une autre manière d'exprimer la condition " $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et f' s'annule en un nombre au plus fini de points sur I " est donc de dire que $f'(x) > 0$ pour tout réel x sauf éventuellement un nombre fini d'éléments de I .

Exemple 31. Montrons que la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Dérivée et extrema

La dérivée est très utile pour la recherche d'extrema. Attention à l'hypothèse d'ouverture.

Proposition 14. Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$. Si f admet un extremum en a sur I , alors $f'(a) = 0$.

Remarque. I doit être ouvert. Dessin à noter.

5. Dérivée et tangente

Définition 16. Soit f une fonction réelle, et a un réel tel que f est définie et dérivable en a . On appelle tangente à la courbe de f en a la droite d'équation :

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Remarque. Dessin à noter : le mieux est d'interpréter cette formule. On se rappellera que la tangente de f en a est l'unique droite caractérisée par :

- sa pente est la dérivée $f'(a)$ de f en a , et
- cette tangente passe par le point $(a, f(a))$.

Remarque. Le calcul de la question (v) montre que si l'on considère la fonction $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, alors pour tout x convenable, $\text{ch} \circ f(x) = x$. On précisera cela, et f et ch seront appelées des fonctions réciproques. Autre exemple : l'exponentielle et le logarithme.

V. Ensemble image, étude de fonctions et recherche d'antécédents

Cette partie sera enrichie et démontrée dans les chapitres à venir.

1. Ensemble image

Définition 17. Soit D une partie de \mathbb{R} . Soit f une fonction réelle définie sur D . On appelle *ensemble image de D par f* l'ensemble noté $f(D)$ donné par :

$$f(D) = \{f(x) | x \in D\}.$$

Autrement dit, $f(D)$ est la partie de \mathbb{R} formée par toutes les images par f des éléments de D .

Remarque. Attention, $f(D)$ est ici une **notation**, on n'applique pas la fonction f à une partie D de \mathbb{R} . On ne peut appliquer une fonction réelle qu'à un réel..

Exemple 32. À noter : sans démonstration, donnons quelques ensembles images.

2. Recherche d'antécédents : ensemble image et bilan

Tout d'abord, la notion d'ensemble image permet de reformuler le problème de la recherche d'antécédents à un réel par une fonction. Dans l'unique but de simplifier les énoncés, on se placera sur un segment, mais vous pourriez avoir besoin en colle des énoncés similaires pour les autres types d'intervalles (je compte sur votre lycée).

Proposition 15. Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a, b]$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il est équivalent de dire :

- (i) $y \in f([a, b])$, et
- (ii) y admet un antécédent par f sur $[a, b]$.

Démonstration. Cela découle directement des définitions. \square

Remarque. En particulier, déterminer l'ensemble image $f([a, b])$, c'est déterminer l'ensemble des réels y admettant un antécédent dans $[a, b]$.

Pour déterminer l'ensemble image d'un segment par une fonction, on commencera par utiliser l'énoncé suivant, ce qui n'est possible que si la fonction y est strictement monotone et continue.

Proposition 16. Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a, b]$ (où a et b sont des réels tels que $a \leq b$). Supposons f continue sur $[a, b]$.

- (i) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
- (ii) Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Démonstration. S2, c'est une version très simplifiée du théorème de la bijection monotone. \square

Remarque. C'est bien la première fois qu'on parle de fonction continue. Un chapitre sera consacré à cette notion au second semestre. Pour l'instant, il vous suffira d'appliquer la proposition suivante :

Proposition 17. Si une fonction f est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque. Ce n'est pas un très bon argument d'un point de vue théorique : la continuité est plus facile à vérifier que la dérivabilité. C'est une "rustine" de début d'année.

3. Recherche d'antécédents : injectivité

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment montrer l'existence d'antécédents sur un segment, pour une fonction strictement monotone. Voyons maintenant comment démontrer l'éventuelle unicité de tels antécédents, toujours sur intervalle (qui sera ici un segment).

Proposition 18. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Supposons f injective sur I . Alors, tout élément de \mathbb{R} admet au plus un antécédent par f sur I .*

Démonstration. À noter. \square

Mis ensemble, les deux propositions 16 et 18 permettent de correctement justifier l'éventuelle existence et unicité d'antécédents pour un réel donné. On utilisera la proposition suivante :

Proposition 19. *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$.*

(i) *Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y il est équivalent de dire :*

- *y admet un antécédent par f sur $[a, b]$, et*
- *$y \in [f(a), f(b)]$.*

Dans ce cas, y admet un unique antécédent sur $[a, b]$.

(ii) *Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors pour tout réel y il est équivalent de dire :*

- *y admet un antécédent par f sur $[a, b]$, et*
- *$y \in [f(b), f(a)]$.*

Dans ce cas, y admet un unique antécédent sur $[a, b]$.

L'étude d'une fonction consiste à :

- Déterminer son domaine de définition,
- déterminer son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée,
- en déduire ses intervalles de monotonie stricte à l'aide d'un tableau de signe de sa dérivée,
- dresser son tableau de variation,
- le compléter avec les limites éventuelles de la fonction à chaque borne du domaine de définition.

À partir de cela, on peut pour commencer:

- tracer une première approximation de son graphe,
- visualiser les extrema de cette fonction,
- répondre à des problèmes d'existence d'antécédents.

Nous reverrons tout cela dans le chapitre sur la dérivation, mais pour le dernier point, plus compliqué, vous suivrez la structure suivante.

Méthode : Pour comprendre la répartition des antécédents d'un réel y par une fonction f à partir de son tableau de variation...

- On se place sur chaque segment sur lequel f est strictement monotone, uns par uns.
- Sur chacun de ces segments, on utilise la proposition 19 pour déterminer les antécédents de y par f .
- On fait la même étude sur les intervalles ouverts ou semi-ouverts restants, en adaptant les conclusions de la proposition 19 à notre cas...

Exemple 33. Étudions la fonction $P : x \mapsto x^3 - 6x + 1$. Déterminons le nombre d'antécédents de 3 par P .

4. Un exercice de synthèse

Exercice 3. Considérons la fonction f donnée par la formule $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

- (i) Donner le domaine de définition D de f .
- (ii) Étudier la dérivabilité de f et calculer f' .
- (iii) Faire le tableau de variation de f et tracer l'allure de son graphe.
- (iv) Déterminer les limites de f . f est elle majorée, minorée, bornée? Admet elle un minimum, un maximum?
- (v) Déterminer le nombre d'antécédents de 2 par f .
- (vi) Calculer, pour $x \in D$, $\frac{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}{2}$.

VI. Lexique des fonctions usuelles

1. Les fonctions polynomiales

Une fonction polynomiale est une fonction f donnée par une formule de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier, et a_0, a_1, \dots, a_n sont $n + 1$ nombres réels.

Propriétés des fonctions polynomiales

- (i) Les fonctions polynomiales sont définies, dérivables sur \mathbb{R} .
- (ii) Pour dériver ces fonctions, il suffit de savoir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, notant $f_n : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{matrix}$, alors pour tout réel x :

$$f'_n(x) = nx^{n-1}.$$

On utilise alors la linéarité de la dérivation pour conclure.

Par exemple, les fonctions f et g définies par les formules

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 + 2x + 1 \\ g(x) &= 2x^{10} - 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

sont polynomiales donc définies sur \mathbb{R} , et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 3x^2 + 2 \times x^0 + 0 = 15x^2 + 2 \\ g'(x) &= 2 \times 10x^9 - 3 \times 2x + 0 = 20x^9 - 6x. \end{aligned}$$

On verra bientôt un chapitre consacré aux propriétés de ces fonctions.

2. La fonction inverse

Considérons ici la fonction inverse $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{matrix}$. On rappelle en particulier que cette fonction est utilisée pour la notation suivante, valable pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

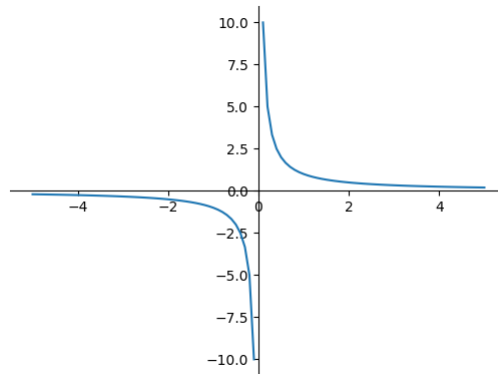
Propriétés de la fonction inverse

(i) La fonction inverse f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* , et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

(ii) La fonction inverse est impaire. Elle est décroissante sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (mais pas sur \mathbb{R}^*).

(iii) Le graphe de la fonction inverse est un exemple de courbes appelées hyperboles.



3. La fonction exponentielle

Considérons la fonction exponentielle $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$.

Propriétés de l'exponentielle

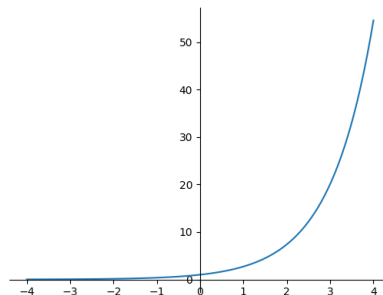
(i) La fonction exponentielle est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

(ii) La fonction exponentielle vérifie $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ (*Admis* : cela la caractérise).

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a e^b$.

(iv) La fonction exponentielle est strictement croissante et strictement positive sur \mathbb{R} .

(v) Une inégalité à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$



Exercice. À l'aide de la propriété (iii), montrer $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ pour tous réels a et b .

4. La fonction logarithme de népérien

La fonction logarithme népérien est la fonction $\ln : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(x) \end{cases}$, définie comme la fonction réciproque de l'exponentielle, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in \mathbb{R}, e^{\ln(x)} = x \text{ et } \ln(e^y) = y.$$

Alternativement, on peut la définir comme l'unique primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1. Ces deux définitions sont pour l'instant inaccessibles.

Propriétés de la fonction logarithme népérien

(i) La fonction \ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et

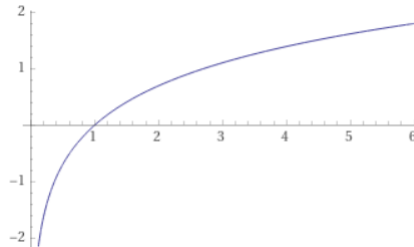
$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

(ii) La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et $\ln(1) = 0$.

(iii) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$.

(v) Une inégalité à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.



Exercice. Dédurre de la relation (iii) : la relation (iv) par récurrence, et la relation $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

5. La fonction racine carrée

On va pouvoir définir la racine carrée.

Proposition 20. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists ! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$.

Démonstration. À noter. \square

Conséquence de cette proposition : la définition suivante est *bien posée*.

Définition 18. (i) Soit x un réel positif. On appelle *racine carrée de x* l'unique réel positif, noté \sqrt{x} , vérifiant :

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

(ii) On appelle fonction *racine carrée* la fonction réelle donnée par :

$$\begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{matrix}.$$

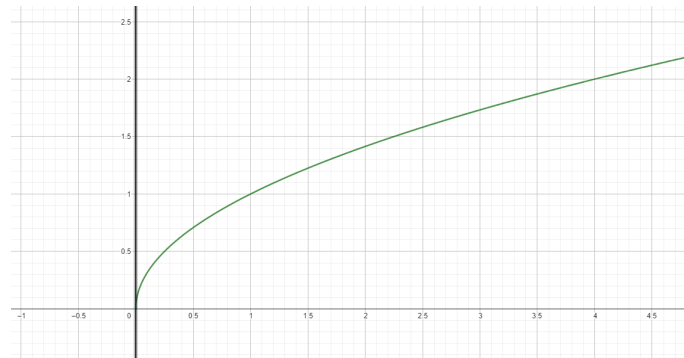
Proposition 21. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ la fonction racine carrée.

(i) La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

(ii) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Voici l'allure de son graphe. Elle n'est pas dérivable en 0, et admet une *tangente horizontale* en 0.



Voici les règles de calcul à connaître.

Proposition 22. Soient a et b deux réels positifs. Alors :

$$(i) \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

$$(ii) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Remarque. Utilisation de la quantité conjuguée. La quantité conjuguée est une technique de calcul classique pour manipuler des racines carrées. Elle consiste par exemple à utiliser la suite d'égalité, dans un sens ou l'autre et pour a et b non tous nuls :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Exemple 34. Déterminons (avec vos restes sur les limites) la limite de $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exemple 35. Simplifions $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Exemple 36. Voir l'exercice 14 du TD01.

Remarque. Un raisonnement analogue à celui fait pour définir la fonction racine carrée permet de définir les fonctions puissances à exposant rationnel, comme $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ ou $x \mapsto x^{-\frac{19}{60}}$. Nous ne le verrons pas ici. À savoir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Pour gagner un peu de temps, on va de suite définir les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ généralisées à tout réel α .

6. Les fonctions puissance généralisée

Idée. On veut donner un sens à x^α , pour tout réel α et pas juste pour les entiers. Voici un calcul heuristique, qui ne fait pas office de justification (on veut définir le membre de gauche...), mais qui vous permet de retrouver la formule utilisée comme définition si vous l'oubliez.

Pour $x > 0$, on voudrait pouvoir écrire :

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln(x)}.$$

(on imite la propriété du \ln). On va donc prendre cela comme définition. Pour que ce soit bien défini, on doit avoir $x > 0$.

Définition 19. (i) Soit x un réel strictement positif. Soit α un réel. On note x^α le réel donné par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

(ii) Soit α un réel qui n'est pas un entier relatif. On appelle *fonction puissance généralisée de paramètre α* la fonction :

$$f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^\alpha \end{cases}.$$

Remarque. Si α est un entier relatif et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors la définition donnée pour x^α redonne les fonctions puissances précédentes (grâce au calcul donné en début de paragraphe). Le point (i) de la définition est donc bien posé.

Remarque. Si α est un entier relatif, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est déjà définie, et admet un domaine de définition plus grand (\mathbb{R} si α est positif, \mathbb{R}^* sinon).

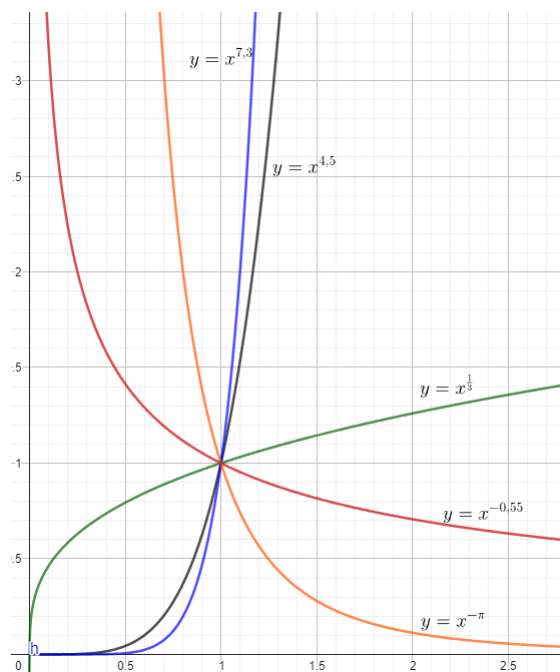
Proposition 23. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f_α la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

(i) f_α est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(ii) f_α est strictement croissante si $\alpha > 0$, et strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Démonstration. À noter. \square

Remarque. Voici quelques tracés de ces fonctions.



Pour calculer, les règles classiques des puissances s'étendent.

Proposition 24. (Règles de calcul avec les puissances)Soit α un réel.(i) Pour tout réel β et pour tout réel $x > 0$:

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \text{ et}$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}.$$

En particulier, $x^{-\beta} = \frac{1}{x^\beta}$.(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$: $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$.**Remarque.** Ce sont les règles de calcul pour les puissances entières...**Démonstration.** A noter? \square **7. La fonction valeur absolue****Définition 20.** (i) Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ donné par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(ii) On appelle fonction *valeur absolue* la fonction $|\cdot|$ donnée par :

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto |x| \end{cases}.$$

Exemple 37. $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ car $\sqrt{3} - 1 > 0$, $|\pi - 5| = 5 - \pi$ car $\pi < 5$.**Proposition 25.** (i) La fonction valeur absolue est dérivable sur \mathbb{R}^* et n'est pas dérivable en 0. Sa fonction dérivée est la fonction :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

(ii) La fonction valeur absolue est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et strictement décroissante sur \mathbb{R}_- .

Voici ses propriétés classiques :

Proposition 26. Pour tous réels a et b :(i) $|-a| = |a|$,(ii) $|ab| = |a||b|$ et $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$ (si $b \neq 0$),(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (première inégalité triangulaire),(iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (seconde inégalité triangulaire).**Démonstration.** Pour le premier point, on peut utiliser la règle de signes. Pour l'inégalité triangulaire, c'est un bon exercice avec des étapes. \square **Remarque.** La première inégalité triangulaire est très importante et peut être requise pour les exercices utilisant la valeur absolue. C'est plus rare pour la seconde, mais ça pourrait apparaître.**Remarque.** La première inégalité triangulaire donne aussi, pour a et b réels :

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

(l'appliquer à $-b$ et utiliser (i)).

Remarque. Attention $|a + b| = |a| + |b|$ est très faux. Exemple : $|1 + (-1)| = 0 \neq 1 + 1$. Par contre...

Proposition 27. (HP) Soient a et b deux réels. Il est équivalent de dire :

- (i) $|a + b| = |a| + |b|$, et
- (ii) a et b sont de même signe.

Remarque. Distance Pour être à l'aise avec les exercices portant sur la valeur absolue, il est très important de comprendre qu'elle permet de mesurer une distance. Explication à noter.

Attention aux pièges avec des racines carrées et des carrés : utilisez toujours les 2 premiers points de la proposition suivante. Le 3e peut servir pour des exercices plus particuliers.

Proposition 28. (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, -x)$.

Enfin, pour des équations et inéquations utilisant la valeur absolue, on utilisera les points suivants :

Proposition 29. Soit x un réel et r un réel tel que $r \geq 0$. Alors :

(i) $|x| = r \iff (x = r \text{ ou } x = -r)$.

(ii) $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.

(iii) $|x| < r \iff -r < x < r$.

(iv) $|x| \geq r \iff (r \leq x \text{ ou } x \leq -r)$.

(v) $|x| > r \iff (r < x \text{ ou } x < -r)$.

De plus, pour tout réel $r < 0$:

(vi) Pour tout réel $r < 0$, les énoncés " $|x| = r$ ", " $|x| \leq r$ " et " $|x| < r$ " sont tous faux.

(vii) Pour tout réel $r < 0$, les énoncés " $|x| > r$ " et " $|x| \geq r$ " sont tous vrais.

Démonstration. Ce serait long sans être difficile. Donnons en une.

Montrons que si $r \geq 0$, alors :

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$$

On va utiliser une propriété simple du maximum, qui est le seul point important à retenir de cette démonstration :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \max(a, b) \leq r \iff (a \leq r \text{ et } b \leq r).$$

Alors :

$$|x| \leq r \iff \max(-x, x) \leq r \iff x \leq r \text{ et } -x \leq r \iff x \leq r \text{ et } x \geq -r \iff -r \leq x \leq r.$$

Au lieu d'apprendre ces résultats par coeur, il faut mieux les comprendre sur un dessin (à noter). \square

8. La fonction partie entière

Le partie entière d'un réel est le nombre entier qui lui est immédiatement inférieur. Son existence et unicité se traduit ainsi :

Proposition 30. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$.

Démonstration. Admise : ce résultat est facile à comprendre, et une démonstration serait longue sans être éclairante. \square

Cette proposition permet de donner la :

Définition 21. (i) Soit x un réel. On appelle partie entière de x l'unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$, vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

(ii) On appelle fonction partie entière la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{cases}.$$

Exemple 38. (i) $\lfloor 42 \rfloor = 42$

(ii) $\lfloor \pi \rfloor =$

(iii) $\lfloor 2.57 \rfloor =$

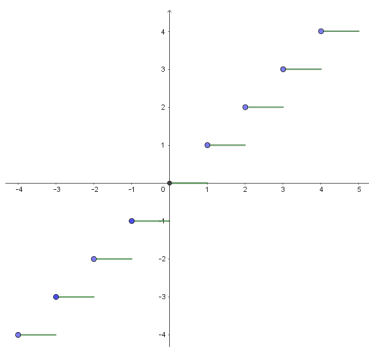
(iv) $\lfloor -3.1 \rfloor =$

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \iff \dots$

(vi) Déterminons $\lfloor \sqrt{5} - 1 \rfloor$.

(vii)

Encore une fois, avoir la courbe bien en tête permettra de retrouver les propriétés requises.



Proposition 31. (i) La fonction partie entière est croissante sur \mathbb{R} mais n'est pas strictement croissante sur \mathbb{R} .

(ii) La fonction partie entière est constante sur chaque intervalle $[n, n + 1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) La fonction partie entière est dérivable sur chaque intervalle $]n, n + 1[$, de dérivée nulle.

On a peu de techniques de manipulations "calculatoires" de la partie entière. Alors, comme pour la valeur absolue, on complète ces propriétés avec les manipulations à utiliser dans le cadre de la résolution d'équations ou d'inéquations. Remarquez le caractère particulier des points du (iv) : n doit être un entier, sinon c'est faux.

Proposition 32. Soit x un réel. Alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$

(ii) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ (c'est la définition, requise pour des exercices).

(iii) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$

(iv) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $\lfloor x \rfloor \leq n \iff x < n + 1.$
- $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n.$
- $\lfloor x \rfloor \geq n \iff x \geq n.$
- $\lfloor x \rfloor > n \iff x \geq n + 1.$
- $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$ (encore une fois, c'est la définition).

Démonstration. De même, c'est long sans être difficile ni éclairant. Le plus important est de retrouver ces équivalences assez vite en pensant au graphe ci-dessus. Illustration à noter. \square

9. La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

sera traitée intégralement dans le DM02 (rien de vraiment nouveau).

VII. Annexe: interprétation graphique des inégalités et égalités

Voir la page de mon prédécesseur (<https://ecg1a-2021-2022.web.app/pdf/Graphiques.pdf>).