Programme de colle n^o 10 : Applications. Asymptotique des suites (début, questions de cours uniquement).

*Semaine du lundi **2 décembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Applications (fin).

10.1 Notion d'application surjective, exemples.

10.2 Notion d'application bijective. Exemples et méthodes pour déterminer si une application est bijective (montrer l'injectivité et la surjectivité, ou bien étudier directement l'équation "$f(x) = y$"). Image réciproque $f^{-1}(b)$ d'un élément $b \in B$ par une application bijective $f : A \to B$. Bijection réciproque d'une application bijective. Soit $f : A \to B$ une application, si on dispose d'une application $g : B \to A$ telle que $\forall (b,a) \in B \times A, f(a) = b \iff a = g(b)$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$. Vocabulaire "f induit une bijection de A' vers B'".

10.3 Si $f : A \to B$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$, et f^{-1} est également bijective de réciproque f. Caractérisation de la bijectivité de f par composition (prop. 72), exemples.

10.4 La composée de deux applications injectives (resp. surjective, resp. bijective) est injective (resp. surjective, resp. bijective et égalité donnant la réciproque de la composée).

Asymptotique des suites

10.5 Définition de "u converge vers l", où l est un réel et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Exemples. Équivalences $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Exercice : si une suite u converge vers un réel l et $l > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.

(Avec les ϵ)

10.6 Définition de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

10.7 Notion de suite convergente, de suite divergente, divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. Toute suite constante converge vers la valeur de cette constance. Toute suite convergente est bornée. Toute suite qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est non bornée (car non majorée, resp. non minorée).

Python

10.8 Fin du TP sur le module matplotlib.

10.9 Tri de listes : tri par sélection du minimum, tri à bulles.

Les élèves doivent savoir implémenter en autonomie le tri à bulles (uniquement).

Quelques questions de cours

1. Soit f une fonction réelle définie et strictement monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$. Que dire de l'injectivité de f sur I? Le démontrer.
2. Définir la notion d'application bijective. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ est bijective.
3. Définir les notions d'image réciproque et d'application réciproque. Donner deux exemples.
4. Énoncer et démontrer la proposition (72) caractérisant la bijectivité d'une application à l'aide de la composition.
5. Démontrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$ est bijective, de réciproque donnée par $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
6. Énoncer et démontrer la proposition (76) établissant l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une composée d'applications injectives, surjectives ou bijectives.
7. Définir "$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$", où u est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ et l un réel. Montrer que $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
8. Montrer que si une suite u converge vers un réel l vérifiant $l > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.
9. Définir "u admet pour limite $+\infty$" (resp. "$-\infty$"). Montrer que $-3n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
10. Énoncer et démontrer la proposition établissant un lien entre la notion de suite bornée et les notions de limites de suites (cas $+\infty$ uniquement pour la divergence).
11. Écrire le code d'un fonction Python permettant d'implémenter le tri à bulles.