Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°7 - Annexe : Ensembles et applications

2024-2025
Mathématiques

Exercice 1

(*a*) Déterminer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$.

(*b*) Soit E un ensemble, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On dit que cette suite de parties de E est croissante pour l'inclusion. Déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On commencera par représenter la situation sur un diagramme de Venn.

Exercice 2 On pose $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

(*a*) Décrire les éléments de E. Justifier qu'on peut interpréter E comme l'ensemble des résultats d'une suite infinie de lancers d'une pièce à pile ou face.

Dans toute la suite de cet exercice, on adopte cette interprétation de l'ensemble E et va interpréter des parties de E selon cette expérience aléatoire.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_i = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E | u_i = 1\}$.

(*b*) Donner un élément de P_1, et un élément de P_2. Interpréter, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble P_i selon l'interprétation précédente de E. En faire de même pour les ensembles $\bar{P}_i$.

(*c*) Déterminer $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$. Interpréter cet ensemble.

(*d*) De même, déterminer et interpréter l'ensemble $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \bar{P}_i$. Que dire de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$?

(*e*) Soit $k \in \mathbb{N}$. Interpréter l'ensemble $\bigcup_{i\geq k} P_i$.

(*f*) En déduire l'interprétation de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{i\geq k} P_i \right)$