TD de mathématiques n°8 : Asymptotique des suites

Pour commencer

Calculs de limites de formules explicites

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il y a ou non une forme indéterminée puis déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (toute utilisation d'un théorème de croissance comparée devra être explicitement mentionnée) :

1) n^2-n-1
2) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$
3) n^3+2n^2+3n+4
4) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
5) n^3-2n^2+3n+4
6) $n+\sqrt{n^2+n}$
7) $n^4+n^2-\left(n^3+n\right)$
8) $n-\sqrt{n^2-n}$
9) $(1-n)(n-1)$
10) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$
11) $n(n-1)(n+1)-n^3$
12) $\frac{n+1}{n}$
13) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$
14) $\frac{n}{n+1}$
15) $1-\frac{n}{n+1}$
16) $n-\frac{n}{n+1}$
17) $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$
18) $e^{1+\ln n}$
19) $n-\frac{n^2}{n+1}$
20) $e^{1-\ln n}$
21) $\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1}$
22) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
23) $\frac{-n^3+n+1}{n^2+1}$
24) $\ln\left(\frac{1}{n}\right)-n$
25) $\frac{3n^3+2n^2-1}{4n^3-n+3}$
26) $\frac{n^2+2n+1}{3n^3-5n+6}$
27) $\ln\left(n^2+1\right)-\ln n$
28) $\frac{(n-1)(n+1)}{(n-2)(n+2)}$
29) $\ln\left(n^2+1\right)-2\ln n$
30) $n\sqrt{n}-n-2\sqrt{n}+1.$
31) $\frac{n^2-n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-n}$
32) $\ln\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$
33) $3+2\times 3^n$
34) $3\times 2^n-2\times 3^n$
35) $\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(9-\frac{1}{n}\right)}$
36) $2^n-3^n+4^n$
37) $\sqrt{1+\frac{3n+1}{n+1}}$
38) $3^n+(-2)^n-5^n$
39) $\sqrt{n-\frac{n^2}{n+1}}$
40) $5\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{5}\times 2^n$
41) $5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$
42) e^n-n^e
43) $e^{n-\ln n}$
44) $\frac{5^n-3^n}{2^n-1}$
45) $\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n$
46) $\frac{2^n-3^n}{2^{-n}+3^{-n}}$
47) $n-\ln\left(n^2-1\right)$
48) $e^{\sqrt{n}}-\sqrt{n}$
49) $\frac{2\times 3^n+2^n}{5\times 3^n-2^n}$
50) 2^n-n^2
51) $\frac{e^{2n}-e^n}{e^{2n}+e^n}$
52) $e^n-\ln n$
53) $\frac{e^{-n}}{n^e}$
54) $\frac{e^n}{n^2+1}$
55) $\ln(n+1)-n$
56) $e^{-n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

Limites et inégalités

Exercice 2 Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>-a$, on pose $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. *On pourra utiliser un encadrement du logarithme, ou démontrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\ln(1+\frac{a}{n}))=a$ *en reconnaissant un taux de variation.*

Exercice 3 Soit $a\in\mathbb{R}_+$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4 Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$ et $v_n=\frac{u_n}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Exercice 5 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ et $w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

(*a*) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq v_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ et $\sqrt{\frac{n}{2}}\leq w_n$.

(*b*) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.

Exercice 6 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

(*a*) Montrer que pour tout $x\in[0,1[$, $\ln(1+x)\leq x\leq-\ln(1-x)$.

(*b*) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{a^n}$.

(a) On suppose que $a \leq 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(b) On suppose que $a > 1$.

(i) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(ii) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.

(iii) En déduire que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$, puis la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Limites et monotonie

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Indication : on pourra étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9 Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^k\right)$.

(a) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

(b) On suppose que $a = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(c) On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

(d) On suppose que $a < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Études de suites récurrentes

Exercice 10 On considère la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n (1 - u_n)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n (1 + u_n)$$

(a) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 12 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n^2\right)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 13 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(d) Écrire un code Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (sans utiliser sqrt bien sûr).

Études de suites définies de manière implicite

Exercice 14

(a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'équation $\sqrt{x^3+x+1} = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n dans la suite de l'exercice.

(b) Montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n$.

(d) Montrer que u n'est pas majorée. En déduire la nature de u.

Exercice 15 Pour tout entier n, on note f_n la fonction polynomiale $x \mapsto x^n + x - 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, et que celle-ci appartient à $]0,1[$. On notera x_n cette solution dans la suite.

(b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.

(c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

(d) Montrer que $(x_n)_n$ converge, et que sa limite l vérifie $0 < l \leq 1$.

(e) Montrer que : $\forall n > 0, x_n \leq l$.

(f) Montrer enfin que $l = 1$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Termes de rangs pairs et impairs

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour continuer

Exercice 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Exercice 18 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Culture générale : La limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée constante d'Euler, se note γ et vaut approximativement 0,577 .

Exercice 19 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 20 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 21 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^3 - 2}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{(v_n)^3 - 2}{3}$$

(a) (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 0]$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq 2$.

(b) (i) Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

(ii) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) (i) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dorénavant, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(ii) Déterminer la valeur de ℓ.

(d) (i) Montrer en raisonnant par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Proposer un code Python permettant d'afficher la valeur du plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \geq 10^{20}$.

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 + 2\sqrt{u_n - 3}$.

(a) On suppose que $u_0 = 8$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) On suppose que $u_0 = 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $4 \leq u_n \leq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 24 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 25 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1$.

(a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell + 1 = \frac{\ell+1}{\sqrt{\ell^2+1}}$.

En déduire que $\ell \in \{-1, 0\}$.

(b) On suppose que $u_0 < -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < -1$.

Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(c) On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]-1, 0[$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(d) On suppose que $u_0 > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.