Programme de colle n° 12 : Asymptotique des suites, dénombrement.

Semaine du lundi 16 décembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Asymptotique des suites

12.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Ensembles finis, dénombrement

12.2 Étude de l'existence d'injections, de surjections et de bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Résultat admis.

12.3 Notion d'ensembles en bijection, ou équipotents. Ensembles finis. Définition du cardinal d'un ensemble fini. Soit E un ensemble fini et F un ensemble, alors E est en bijection avec F si et seulement si F est fini de cardinal $\text{Card}(E)$.

12.4 Propriétés du cardinal : Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, équivalence " $A = E \iff A \subset E$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ ".

Résultat admis.

12.5 Cardinal d'une réunion disjointe.

Démonstration informelle.

12.6 Cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini. Cardinal d'une réunion d'ensembles finis deux à deux disjoints. Cardinal d'une réunion de deux ou de trois (formule du Crible) parties d'un ensemble fini.

12.7 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.

12.8 Exemples type de dénombrements.

12.9 Notion d'arbre binaire, tout arbre binaire de hauteur n possède 2^n feuilles. Chemins d'un arbre binaire. Correspondance entre chemins et feuilles: tout arbre binaire admet 2^n chemins. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Partie formellement admise, explications peu formalisées à comprendre.

12.10 Factorielle d'un entier. Si E et F sont deux ensembles finis de cardinal n , alors il y a $n!$ bijections de E vers F . Ensemble des permutations d'un ensemble fini.

Python

12.11 Se reporter au programme de colle précédent.

Quelques questions de cours

- Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.
- Énoncer le théorème portant sur les sous-suites des termes de rangs pairs et impairs. Montrer que si q est un réel tel que $q \leq -1$, alors $(q^n)_n$ n'admet pas de limite.
- Définir la notion d'ensemble fini. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant le cardinal d'un ensemble fini.
- Énoncer les proposition relatives au cardinal d'une réunion disjointe et du complémentaire de deux (resp. d'une) parties d'un ensemble fini. Démontrer la proposition relative au complémentaire.
- Énoncer et démontrer la proposition relative au cardinal d'une réunion de parties deux à deux disjointes $A_1, \dots, A_n$ d'un ensemble fini.
- Énoncer et démontrer la proposition donnant le cardinal d'une réunion non nécessairement disjointe.
- Énoncer la proposition relative au cardinal d'un produit cartésien (fini) d'ensembles finis. Démontrer le premier point.