TD de mathématiques n°9 : Dénombrement

Pour commencer

Dénombrement général

Exercice 1 On lance trois fois successivement un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note dans l'ordre les chiffres obtenus.

(a) Écrire mathématiquement l'ensemble Ω des résultats possibles et déterminer $\text{Card}(\Omega)$.

(b) On considère le sous-ensemble $D \subset \Omega$ formé des résultats pour lesquels au moins l'un des trois chiffres obtenus est égal à 1. Déterminer $\text{Card}(D)$ en proposant deux argumentations différentes.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini et $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E.

Montrer que $\text{Card}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) \leq \text{Card}\left(A_1\right) + \cdots + \text{Card}\left(A_n\right)$.

Exercice 3 On lance trois fois de suite un dé à 6 faces et on note, dans l'ordre, les chiffres obtenus. On note Ω l'ensemble des résultats obtenus.

(a) Décrire Ω mathématiquement et déterminer $\text{Card}(\Omega)$.

(b) Combien d'éléments de Ω comportent 3 chiffres distincts?

(c) Combien d'éléments de Ω comportent 3 chiffres identiques?

(d) Combien d'éléments de Ω comportent 2 chiffres identiques, mais pas 3 chiffres identiques?

Exercice 4 Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 . On tire successivement et sans remise deux jetons dans ce sac pour former un nombre : le premier jeton tiré donne le chiffre des dizaines et le second jeton tiré donne le chiffre des unités.

(a) Combien de nombres différents peut-on obtenir?

(b) Combien de nombres pairs différents peut-on obtenir?

Exercice 5 On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 et n boules numérotées de 1 à n.

(a) De combien de manières peut-on ranger les n boules dans les 3 urnes?

(b) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels l'urne U_1 est vide?

(c) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels au moins une urne est vide?

(d) Combien existe-t-il de rangements pour lesquels aucune urne n'est vide?

Exercice 6 Déterminer, en justifiant, le nombre d'anagrammes des mots "PYTHON", "MATHÉMATIQUES" et "ABRACADABRA".

Exercice 7 Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement une à une et sans remise toutes les boules de cette urne et on note dans l'ordre les couleurs des boules obtenues.

(a) Combien existe-t-il de résultats?

(b) Parmi ces résultats, combien commencent par la couleur noire? Combien terminent par la couleur noire?

(c) Pour chaque valeur de k comprise entre 3 et 6 , déterminer le nombre de résultats pour lesquels la dernière boule noire est obtenue au tirage numéro k.

(d) On suppose maintenant que l'urne contient n boules rouges et n boules noires et on considère un nombre entier $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$. Déterminer le nombre total de résultats, puis le nombre de résultats pour lesquels la dernière boule noire est obtenue au tirage numéro k.

Exercice 8 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket 0, p \rrbracket$. On dispose de p boîtes numérotées de 1 à p, et de p boules dont n sont blanches et les autres sont noires. De combien de manières peut-on ranger les p boules dans les p boîtes, en rangeant une unique boule par boîte?

En déduire le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \{0,1\}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

Exercice 9 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

(a) sans imposer de contraintes sur les cartes ?

(b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ?

(c) contenant 2 carreaux et 3 piques ?

(d) contenant au moins un roi ?

(e) contenant au plus un roi ?

(f) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques ?

Coefficients binomiaux

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer explicitement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$ en fonction de n.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$.

On donnera la réponse sous forme d'un coefficient binomial.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement en fonction de n les sommes ci-dessous :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ (b) $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ (c) $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k}$

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer explicitement en fonction de n les sommes ci-dessous :

(a) $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (b) $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer un coefficient binomial C tel que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)C$.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$. Indication : $k^2 = k(k-1+1)$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. Indication : on pourra s'intéresser à $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 16 Soit $p \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement en fonction de n :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice 17 Soient $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq p+1$.

(a) Montrer que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (Formule de Pascal généralisée).

(c) Interpréter cette formule à l'aide du triangle de Pascal.

Pour continuer

Exercice 18 Soit Ω l'ensemble des nombres de quatre chiffres n'utilisant que les chiffres $1, 2, 3, 4, 5$ et 6 , les répétitions étant autorisées.

(a) Déterminer $\text{Card}(\Omega)$.

(b) Combien d'éléments de Ω peut-on écrire sans répétitions de chiffres?

(c) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 3 fois le chiffre 1 ?

(d) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 2 fois le chiffre 1 ?

(e) Combien d'éléments de Ω contiennent exactement 2 fois le chiffre 1 et 3 chiffres distincts en tout?

Exercice 19 Déterminer le nombre de dominos distincts que l'on peut fabriquer en numérotant leurs cases avec les nombres entiers naturels de 0 à 6 . Même question en numérotant de 0 à n.

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de p boîtes numérotées de 1 à p et de n boules blanches toutes identiques. De combien de manières peut-on ranger les n boules dans les p boîtes (on peut laisser des boîtes vides)?

En déduire le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(X) = (1 + X)^n$.

(a) Déterminer de deux manières le coefficient de X^n dans le polynôme $(P(X))^2$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ainsi que de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2$.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.

(b) En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ en fonction de n et p.

(c) En déduire également la valeur de $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ en fonction de n et p.