Chapitre 10 : Limites de fonctions, notion de continuité en un point.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Limites de fonctions : définitions

Exemple 1. Les notions liées aux limites de fonctions sont plus riches que celles liées aux suites réelles : illustrations à noter.

1. Limite d'une fonction en un point

a) Adhérence d'un intervalle

Rappel : Un intervalle I est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, ou $[a,b]$ avec a et b des réels ou éventuellement $a=-\infty$, $b=+\infty$. On dit que a et b sont les bornes de I, et ces bornes sont dites finies si ce sont des réels.

Par exemple, les bornes de $[2,+\infty[$ sont 2 et $+\infty$, et sa seule borne finie est 2. Les bornes de $]2,4[$ sont 2 et 4, et sont finies. $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ n'a pas de bornes finies (ses bornes sont $-\infty$ et $+\infty$).

Définition 2. On appelle adhérence d'un intervalle I, et on note $\bar{I}$, la réunion de I et de ses bornes finies.

Par exemple, $\overline{]-4,4]}=[-4,4]$ et $\overline{]-\infty,0[}=]-\infty,0]$.

Dans toute la suite, les intervalles considérés seront non vides et non réduits à un point. Ainsi, les énoncés donnés s'appliqueront aux intervalles d'une des forme donnée ci-dessus, avec $a<b$ quand a et b sont réels. On exclu ainsi de nos définitions les intervalles comme $[4,4]$ ou $]-1,-1]$, qui sont problématiques pour nos énoncés.

b) Limite finie d'une fonction en un point, continuité

Définition 3. Soit I un intervalle et $x_0 \in \bar{I}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et l un réel.
On dit que f admet l pour limite en x_0, et on écrit

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$$

si :

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I, |x-x_0|<\alpha \implies |f(x)-l|<\epsilon.$$

Remarque. Pour tous réels a, b et δ, on a $|a-b|<\delta \iff a \in]b-\delta, b+\delta[$. Ainsi, on aurait pu reformuler la définition de l'une des manières suivantes :

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I, x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\implies f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

ou encore

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I\cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

Remarque. Dans la définition, f est une fonction réelle d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, mais cette définition (et toutes celles de ce chapitre) s'applique à toute fonction réelle, même si son ensemble d'arrivée n'est qu'une partie de $\mathbb{R}$, comme $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$.

Exemple 4. On peut montrer que les fonctions constantes ont une limite en tout point, qui est la constante en question. Autrement dit, si $c \in \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$c \xrightarrow[x \to x_0]{} c.$$

Exemple 5. On peut montrer $x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$ pour tout réel x_0.

Exemple 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $f_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont 0 est une borne finie. On pourra donc montrer :

$$x^\alpha \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}.$$

Définition 7. (**et proposition**)
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$, de sorte que f est définie en x_0.
Si f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0, alors $l = f(x_0)$.
Dans ce cas, on dit que f est **continue en** x_0.

Démonstration. A noter. □

Exemple 8. La fonction $\mathrm{Id}_\mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue en tout réel.

Exemple 9. On admet les résultats suivants : la fonction exponentielle est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. Autrement dit:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, e^x \xrightarrow[x \to x_0]{} e^{x_0}.$$

La fonction logarithme népérien est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ln(x_0).$$

Remarque. Une fonction non continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ est dite **discontinue** en x_0.

Exemple 10. Montrons que la fonction partie entière $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ n'est pas continue en 0 (à noter). On montre de même que cette fonction est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

c) Limite infinie en un point

Définition 11. Soit I un intervalle réel, $x_0 \in \bar{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

(i) On dit que f admet $+\infty$ comme limite en x_0 si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

(ii) On dit que f admet $-\infty$ comme limite en x_0 si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < A$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$.

Remarque. La définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ s'interprète de la manière suivante : les valeurs $f(x)$ sont toutes si grandes que voulu quand x est assez proche de x_0 :

- $|x - x_0| < \alpha$ signifie que $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, c'est-à-dire que x est distant d'au plus α de x_0.
- Donc, à $A \in \mathbb{R}$ fixé, $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A$ signifie " si x est assez proche de x_0, alors $f(x) > A$", le "assez proche" étant décrit par un réel α dont la définition impose l'existence.
- A étant quantifié avant α dans la définition, "α dépend de A".

Exemple 12. Illustration à noter.

Exemple 13. Montrons :

$$\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

d) Limite en x_0 d'une fonction définie sur un intervalle épointé de x_0.

Exemple 14. Illustration à noter.

On étend les définitions au cas des fonctions définie sur un intervalle épointé, c'est-à-dire un intervalle privé d'un point, pour pouvoir regarder la limite en ce point manquant.

Définition 15. Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < A.$$

Exemple 16. La fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrons que $\dfrac{1}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$.

e) Limite à gauche, limite à droite, intervalles épointés

On remarquera que la définition ci-dessous s'applique indifféremment que f soit définie en x_0 ou non.

Définition 17. (Limite à gauche)
Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, f(x) < A.$$

Définition 18. (Limite à droite)
Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) < A.$$

Remarque. Les notions de limites à gauche et à droite excluent x_0 de la condition :

$$\dots \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[\dots$$

Exemple 19. Montrons que $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Exemple 20. Montrons que $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$.

Exemple 21. De même, $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$.

L'étude des limites à gauches et à droites en un point permet souvent de conclure sur l'étude de la limite en ce point, grâce à la proposition suivante.

Proposition 22. *Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

- *Soit f une fonction réelle définie sur I (donc en x_0). Alors, il est équivalent de dire :*
  - *(i)* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$, *et*
  - *(ii)* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$ *et* $l = f(x_0)$.
- *Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors, il est équivalent de dire :*
  - *(i)* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$,
  - *(ii)* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$.

Démonstration. admis (mais résultat simple découlant juste des définitions). □

Exemple 23. Montrons que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

Remarque. Morale de ces deux énoncés : une fonction admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 avec ces limites égales, et il faut en plus vérifier que ces limites valent $f(x_0)$ si f est définie en x_0.

Exemple 24. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet-elle des limites à droite et à gauche en 0? Que dire de sa limite en 0? (À noter)

f) Prolongement par continuité d'une fonction

Proposition 25. ***(et définition)*** *Soit I un intervalle, $x_0 \in \bar{I}$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 s'il existe un réel l tel que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l.$$

Dans ce cas, la fonction

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

est continue en x_0. $\tilde{f}$ est appelée le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque. Bien souvent, quand une fonction f est prolongeable par continuité en un point x_0, on fait l'abus de notation de toujours noter f le prolongement par continuité de f en x_0, à condition de l'indiquer clairement dans le texte.

Exemple 26. À noter : $x \mapsto x^\alpha$, pour $\alpha > 0$.

Exemple 27. À noter : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

2. Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

a) Voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Considérons un intervalle I de bornes a et b (pouvant être réelles ou infinies, avec $a < b$) de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. On dit alors que a est la borne inférieure de I et b la borne supérieure de I.

Définition 28. On dit qu'un intervalle est un voisinage de $+\infty$ si sa borne supérieure est $+\infty$. On dit qu'un intervalle est un voisinage de $-\infty$ si sa borne inférieure est $-\infty$.

Par exemple,

- $]-1, 0]$
- $]-\infty, 2[$
- $\mathbb{R}$

b) Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 29. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies f(x) < A.$$

Définition 30. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies f(x) < A.$$

Remarque. On retrouve les interprétations des définitions précédentes, en remplaçant "x assez proche de x_0" par "x assez grand" pour la limite en $+\infty$ ou "x assez petit" pour la limite en $-\infty$.

Exemple 31. Illustration à noter.

Remarque. Ces définitions s'adaptent sans mal si f est définie sur un intervalle épointé, donc si f est définie sur une partie de la forme $I \setminus \{x_0\}$ pour $x_0 \in I$ (et, toujours, I un voisinage de l'infini que l'on considère). Par exemple, si $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

On remplace simplement I par le domaine de définition de f.

Exemple 32. (*i*) $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

(*ii*) $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

(*iii*) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

(*iv*) $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

II. Énoncés généraux sur les limites

Les énoncés seront tous admis.

Un *voisinage* d'un point x_0 est, en guise de première approximation, une partie de $\mathbb{R}$ sur lequel on peut étudier des limites en ce point x_0.

Définition 33. (Notion de voisinage)

(*i*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0 si :

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset V.$$

(*ii*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0^+ (ou voisinage à droite épointé de x_0) si :

$$\exists \delta > 0,]x_0, x_0 + \delta[\subset V.$$

(*iii*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0^- (ou voisinage à gauche épointé de x_0) si :

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0[\subset V.$$

(*iv*) On dit qu'un intervalle V est un voisinage de $+\infty$ si :

$$\exists A \in \mathbb{R},]A, +\infty[\subset V.$$

(*v*) On dit qu'un intervalle V est un voisinage de $-\infty$ si :

$$\exists A \in \mathbb{R},]-\infty, A[\subset V.$$

Voici une première utilisation de cette notion.

Exemple 34. On dispose de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, qui coïncident sur une partie I de $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in I, f(g) = g(x).$$

On sait de plus que $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2$.

Peut-on en déduire que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2$?

Cette déduction n'est permise que si I est un voisinage de 0.

Proposition 35. *Soient f et g deux fonctions réelles, de domaines respectifs D_f et D_g.*
Soit I un intervalle tel que $I \subset D_f$, $I \subset D_g$ et :

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dont I est un voisinage et pour tout $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \iff g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l.$$

Cet énoncé reste vrai en remplaçant x_0 par x_0^- (resp. x_0^+) et "voisinage" par "voisinage à gauche" (resp. "à droite").

Exemple 36. Illustration à noter.

1. Unicité de la limite, notation lim

Proposition 37. *Si la limite d'une fonction en un point, à gauche ou a droite d'un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$ existe, alors elle est unique.*
Autrement dit, si l et l' sont deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \implies l = l',$$

où a peut désigner chacune des situations précédentes : un réel, une limite à gauche ou a droite, $+\infty$ ou $-\infty$, et où f est une fonction réelle permettant de définir la notion de limite considérée ci-dessus.

Remarque. Cette proposition justifie la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ pour paraphraser $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$. On peut alors utiliser $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour désigner la limite de f en a, mais **attention**, utiliser cette notation affirme que f admet une limite (finie ou infinie) en a. On s'assurera d'avoir bien démontré que cette limite existe avant d'utiliser la notation lim.

2. Passage à la limite des inégalités

Proposition 38. *Soient I un intervalle, $a \in \bar{I}$, et f et g deux fonctions définies sur I. Supposons qu'il existe un voisinage V de a tel que :*

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x).$$

Si f et g admettent des limites finies en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Remarque. Dans le cas où $a \in I$ est un réel, la même proposition est vraie en remplaçant partout I par $I \setminus \{a\}$, afin de traiter le cas où f et g ne sont pas définie en a. Cette proposition est aussi vraie si a est infini.

Remarque. La même proposition est également vraie pour les limites à gauche et à droite en a.

Remarque. Comme pour les suites, cet énoncé n'est vrai qu'avec des inégalités larges. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 < 1 + \dfrac{1}{x}$ mais

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

donc l'inégalité stricte entre les limites n'a pas lieu.

3. Opérations algébriques sur les limites

a) Addition

Proposition 39. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions qui admettent une limite en a. Alors, dans les cas non marqués F.I. (pour forme indéterminée), le tableau suivant donne la limite de $f+g$ en a.*

$\lim\limits_{x\to a} f \setminus \lim\limits_{x\to a} g$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

b) Produit

Proposition 40. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions qui admettent une limite en a. Alors, dans les cas non marqués F.I. (pour forme indéterminée), le tableau suivant donne la limite de fg en a.*

$\lim\limits_{x\to a} f \setminus \lim\limits_{x\to a} g$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	0	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}_-^*$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$l' \in \mathbb{R}_+^*$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque. Les tableaux et les formes indéterminés sont exactement les mêmes que pour les suites. La rédaction est également la même.

Exemple 41. A noter : les fonctions polynômiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

c) Inverse

Définition 42. (*i*) Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. On dit qu'une fonction f admet 0 pour limite en a par valeurs positives, et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+, \text{ ou encore } \lim_{x\to a} f(x) = 0^+$$

si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \geq 0$.

(*ii*) Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. On dit qu'une fonction f admet 0 pour limite en a par valeurs négatives, et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^-, \text{ ou encore } \lim_{x\to a} f(x) = 0^-$$

si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \leq 0$.

Exemple 43. À noter : cas de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en l'infini et en 0.

Proposition 44. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f une fonction admettant une limite en a. Alors, si $\dfrac{1}{f}$ est définie sur un voisinage de a, les cas non marqués F.I. du tableau ci-dessous donnent la limite de $\dfrac{1}{f}$ en a .*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x)$	$\dfrac{1}{l}$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Remarque. Pour le cas en 0, 0^+ ou 0^-, il suffit de retenir le graphe de la fonction inverse pour retrouver le raisonnement.

4. Composition et limites

Proposition 45. *Soient f et g deux fonctions réelles. Soit a désignant un réel, une limite à gauche ou a droite, $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en a, et que g admet une limite l' en l. Alors, $g \circ f$ admet l' pour limite en a. Autrement dit, pour l et l' réels ou infinis et si les limites sont possibles, alors :*

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \\ g(x) \xrightarrow[x\to l]{} l' \end{cases} \implies g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'.$$

5. Limites classiques

a) Continuité

Proposition 46. *Toutes les fonctions usuelles, à l'exception de la partie entière, sont continues en tout point de leur domaine de définition. Ainsi, pour f une fonction polynomiale, la fonction logarithme népérien ou exponentielle, une fonction puissance éventuellement généralisée, ou la fonction valeur absolue, on a, notant D_f son domaine de définition :*

$$\forall x_0 \in D_f, f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0).$$

Remarque. La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Exemple 47. Calculons la limite de $x \mapsto e^{3x} - x^2 + 3\ln(2x)$ en 1.

b) Limites classiques au bords

Voici les limites classiques à connaitre :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair,} \\ -\infty \text{ sinon.} \end{cases}$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim_{x\to-\infty} x^{-n} = 0$.

Si n pair, alors $\lim_{x\to 0} x^{-n} = +\infty$.

Si n impair, $\lim_{x\to 0^+} x^{-n} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = -\infty$.

(iii) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

(iv) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(v) $\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

Exemple 48. A noter : limites de $x \mapsto x^\alpha$.

c) Levée des formes indéterminées

Pour lever les formes indéterminées, on appliquera la même stratégie que pour les suites (factoriser par le terme "imposant sa limite"), en utilisant la croissance comparée.

d) Croissance comparée

Proposition 49. *Soient α, β et γ trois réel strictement positifs. Alors :*

(i) $x^\beta \ln(x)^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\dfrac{ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{x^\beta}{ln(x)^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) $\dfrac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $x^\beta e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Exemple 50. Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{2^x}{x^4}$ en $+\infty$

e) Deux limites par taux d'accroissement

Proposition 51. *(i)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration. A noter. □

Exemple 52. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

6. Compatibilité avec les suites

Proposition 53. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \bar{I}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \in I.$$

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *alors :*

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exemple 54. $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n}$?

III. Théorèmes d'existence de limites

1. Existence par encadrement, par comparaison

Proposition 55. (Théorème des gendarmes) *Soit I un intervalle et $a \in \bar{I}$. Soient f, g et h des fonctions définie sur I. On suppose que :*

(i) Il existe un voisinage V de a tel que : $\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et

(ii) f et h admettent une limite en a, et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$.

Alors, g admet une limite en a, et

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Cet énoncé est toujours vrai si a désigne une limite à droite ou à gauche, ou si f, g et h sont définies sur $I \setminus \{a\}$ (mutatis mutandis).

Exemple 56. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \leq x$ et en déduire la limite de $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ en 0^+, puis en 0.

Proposition 57. ***(Théorème de comparaison)*** *Soit I un intervalle et $a \in \bar{I}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I.*
On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x).$$

Alors :

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

(ii) Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

2. Théorème de la limite monotone

Proposition 58. *Soit I un intervalle de borne inférieures et supérieures, respectivement, a et b. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors,*

(i) f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$.

(ii) Si f est croissante. Alors :

- *(a) Si f est majorée sur un voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b. Sinon, elle admet $+\infty$ comme limite en b.*
- *(b) Si f est minorée sur un voisinage de a, alors elle admet une limite finie en a. Sinon, elle admet $-\infty$ comme limite en a.*

(iii) Si f est décroissante. Alors :

- *(a) Si f est minorée sur un voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b. Sinon, elle admet $-\infty$ comme limite en b.*
- *(b) Si f est majorée sur un voisinage de a, alors elle admet une limite finie en a. Sinon, elle admet $+\infty$ comme limite en a.*

Exemple 59. Illustration à noter.

Exemple 60. Exemple à noter.

IV. Continuité sur un intervalle, asymptotes

Dans cette dernière partie, on explore un peu plus la notion de continuité, on voit un lemme majeur lié à la notion de voisinage, puis nous définissons les notions d'asymptotes.

1. Continuité sur un intervalle

On rappelle qu'une fonction f définie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est dite *continue en x_0* si

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

Définition 61. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I.
On dit que f est *continue sur I* si pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0.

Exemple 62. (fil rouge) On va petit à petit montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1,1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (méthodes 1,2 et 3).

Exemple 63. Méthode 1 : Cette fonction est définie "par morceaux" à l'aide de fonctions usuelles continues. Notre étude se fera en deux temps :

(i) On justifiera d'abord sa continuité en dehors des points de recollement (sur chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$.

(ii) On justifiera ensuite sa continuité en ces points de recollement (ici, -1 et 1).

a) Premier temps, et ajout important sur la notion de voisinage

Dans ce premier temps, on travaille sur chaque intervalle où f coïncide avec une fonction continue "par opérations sur les fonctions usuelles". Voici les énoncés nous permettant de le faire.

Proposition 64. *Soit I un intervalle ouvert. Alors, pour tout $x_0 \in I$, I est un voisinage de x_0.*
Autrement dit, pour tout $x_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$.

Remarque. Autrement dit, tout intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Dans cette démonstration, pour simplifier l'écriture, on se permet d'utiliser les inégalités avec $-\infty$ et $+\infty$ (sans calculer avec les infinis pour autant).

Démonstration. En annexe. $\square$

Remarque. En pratique, dans l'énorme majorité des cas, c'est cet énoncé que vous utiliserez pour vérifier qu'une partie donnée de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point (il suffira que cette partie soit un intervalle ouvert contenant ce point).

Cela permet donc de travailler sur un intervalle ouvert I pour déduire des résultats sur des limites de fonctions en tout point de I.

Proposition 65. *Soit f et g deux fonctions réelles. Soit I un intervalle* **ouvert** *sur lequel f et g sont définies. On suppose que f et g coïncident sur I, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Alors, f et continue sur I si et seulement si g est continue sur I.

Démonstration. En annexe. $\square$

Exemple 66. Méthode 2 : Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$
est continue sur $]-\infty, -1[$ (on appliquerait une démarche similaire pour les autres intervalles).

b) Second temps

Exemple 67. Méthode 3 : Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$
est continue en -1 (on appliquerait une démarche similaire pour sa continuité en 1).

Exemple 68. (Fin du fil rouge) On peut maintenant conclure notre étude de la continuité de cette fonction f.

2. Asymptotes

a) Asymptotes horizontales et verticales

Définition 69. Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
On dit que la courbe de f admet une asymptote verticale à droite (resp. à gauche) d'équation $x = x_0$ si f admet une limite infinie à droite (resp. à gauche) en x_0. Dans ce cas, on dit aussi que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe de f à droite (resp. à gauche).
On dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ si la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe de f à droite et à gauche.

Définition 70. Soit I un voisinage de $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$$

(resp. $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l$).

Exemple 71. Soit $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x-1}$. Donner les asymptotes verticales et horizontales de f. Dessin à noter.

Remarque. Ces notions permettent de préciser le tracé d'un graphe.

b) Asymptotes obliques

Définition 72. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit a et b deux réels.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si :

$$f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

(resp. $f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$).

Remarque. Si $a \neq 0$ dans la définition ci-dessus, l'asymptote d'équation $y = ax + b$ n'est pas une droite verticale ou horizontale, d'où la terminologie d'asymptote oblique.

Remarque. Interprétation graphique : à noter.

Pour déterminer une éventuelle asymptote (oblique), on utilisera la méthode découlant de la proposition suivante (énoncée en $+\infty$ ici).

Proposition 73. *Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit a et b deux réels.*
Alors, la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe de f en $+\infty$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, *et*

(ii) $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$

La même proposition est vraie en remplaçant partout "$+\infty$" par "$-\infty$".

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 74. Méthode : Pour déterminer les éventuelles asymptotes d'une fonction, on sépare l'étude en chaque borne infinie du domaine de définition de f, et on utilise directement cette proposition dans chaque cas.

Déterminons les éventuelles asymptotes obliques de la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 2x^2}{x+1}$.

V. Annexe

1. Proposition 64

Proposition 64. *Soit I un intervalle ouvert. Alors, pour tout $x_0 \in I$, I est un voisinage de x_0.*

Autrement dit, pour tout $x_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, avec $a < b$ (où a et b peuvent être infini). Soit $x_0 \in I$. Par définition de la notion de voisinage, on doit démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I.$$

Posons $d_1 = \dfrac{1}{2}|x_0 - a|$ si a est fini, et $d_1 = 1$ sinon. *Remarque : d_1 est la mi-distance entre a et x_0 si a est fini.*

Montrons que $d_1 > 0$ et que dans tous les cas : $a < x_0 - d_1$.

Premier cas : Si $a = -\infty$, c'est évident (dans ce cas $d_1 = 1 > 0$ et par convention, $-\infty < x_0 - 1$).

Second cas : Si a est fini, $x_0 \in]a, b[$ donc $x_0 > a$ d'où $d_1 = \dfrac{1}{2}(x_0 - a) > 0$. Alors :

$$a < x_0 - d_1 \iff a - x_0 < -d_1 \iff a - x_0 < -\frac{1}{2}|x_0 - a| \iff a - x_0 < \frac{1}{2}(a - x_0)$$

Cette dernière inégalité est vraie, car $a < x_0$ (car $x_0 \in I$) donc $a - x_0 < 0$.

Conclusion : Dans tous les cas, $d_1 > 0$ et $a < x_0 - d_1$.

Posons $d_2 = \dfrac{1}{2}|x_0 - b|$ si b est fini, et $d_2 = 1$ sinon, de sorte que dans tous les cas, $d_2 > 0$ et $x_0 + d_2 < b$ (démonstration analogue).

Posons enfin $\delta = \min(d_1, d_2)$ de sorte que $\delta \leq d_1$ et $\delta \leq d_2$. Alors,

$$a < x_0 - d_1 \leq x_0 - \delta \leq x_0 + \delta \leq x_0 + d_2 < b$$

montre que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$, et $\delta > 0$ car $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$.

On a donc bien trouvé $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$.

D'où le résultat : I est un voisinage de x_0.

2. Proposition 65

Proposition 65 : *Soit f et g deux fonctions réelles. Soit I un intervalle* **ouvert** *sur lequel f et g sont définies. On suppose que f et g coïncident sur I, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Alors, f et continue sur I si et seulement si g est continue sur $\mathbb{R}$.

Les rôles de f et g étant symétriques, montrons que si g est continue sur I, alors f l'est aussi.

Soit $x_0 \in I$.

I étant un intervalle ouvert, c'est un voisinage de x_0. On a par hypothèse :

$$\forall x \in I, f(x) = g(x)$$

et par continuité de g sur I, donc en x_0 :

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$$

Par théorème (I étant un voisinage de x_0) :

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$$

Or, $f(x_0) = g(x_0)$ car $x_0 \in I$.

donc $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$: f est continue en x_0.

On a donc démontré que f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$. Par définition, f est continue sur I.