Ex 2.P1.

1 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^n\left(1 + 2\cdot\frac{n}{2^n} + \frac{n^2}{2^n}\right)}{-3^n\left(1 - 3\cdot\frac{n}{3^n} + \frac{n^3}{3^n}\right)}$.

Or, par croissance comparée : $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(2>1)$

et $\frac{n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{n^3}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(3>1)$.

Ainsi, sans forme indéterminée : $\dfrac{1 + 2\cdot\frac{n}{2^n} + \frac{n^2}{2^n}}{1 - 3\cdot\frac{n}{3^n} + \frac{n^3}{3^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1} = 1$

De plus, $\frac{2^n}{-3^n} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$.

Par produit : $\underline{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n^2 + e^{-n}) - n\ln(n) = \ln\left(n^2\left(1 + \frac{e^{-n}}{n^2}\right)\right) - n\ln(n)$

$= \ln(n^2) - n\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{e^{-n}}{n}\right)$

$= (2-n)\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{e^{-n}}{n}\right)$.

Or, $1 + \frac{e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par composition, $\ln\left(1 + \frac{e^{-n}}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0$.

De plus, $\begin{cases} (2-n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \\ \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$ donc $(2-n)\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Par somme, $\underline{u_n = (2-n)\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{e^{-n}}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{e^{2\ln(n)}} = e^{\sqrt{n} - 2\ln(n)}$.

Or, $\sqrt{n} - 2\ln(n) = \sqrt{n}\left(1 - 2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ et $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

par croissance comparée $(1/2 > 0)$.

Ex2P2

De plus, $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sqrt{n} - 2\ln(n) = \sqrt{n}\left(1 - 2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ainsi par composition :

$$\underline{u_n = e^{\sqrt{n}-2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} .$$

2. $P(X) = X^2\left(X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}\right)$.

-1 est racine de $X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2} & X+1 \\
\cline{2-2}
-\left(X^3 + X^2\right) & X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \\
\cline{1-1}
\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2} & \\
-\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right) & \\
\cline{1-1}
-\frac{1}{2}X - \frac{1}{2} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc : $P(X) = X^2(X+1)\left(X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)$.

Or, $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$ (-1 est racine évidente, l'autre est $\frac{1}{2}$ par les relations coefficients-racines).

Donc $\underline{P(X) = X^2(X+1)^2\left(X - \frac{1}{2}\right)}$

Ex 2 P 3

3 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $x^x = e^{x\ln(x)}$ est bien défini et positif strictement.

Donc $\ln(x^x)$ est bien défini.

Donc $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)}$ est bien défini.

Ainsi, $f(x) = (x^x)^x$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln(x)}$ (car $x > 0$).

Or, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur leurs domaines respectifs, donc $x \mapsto x^2\ln(x)$ l'est aussi.

$x \mapsto e^x$ est dérivable sur son domaine de définition donc par composition :

$f : x \mapsto e^{x^2\ln(x)}$ est dérivable sur son domaine de définition.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) e^{x^2\ln(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = x\,(2\ln(x)+1)\,e^{x^2\ln(x)}$

3 c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors, $x > 0$ et $e^{x^2\ln(x)} > 0$.

Donc $f'(x) = x\,(2\ln(x)+1)\,e^{x^2\ln(x)}$ est du signe strict de $2\ln(x)+1$.

Or, $2\ln(x)+1 > 0 \iff \ln(x) > -\frac{1}{2} \iff x > e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Une équivalence similaire avec des égalités donne alors le tableau suivant :

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1/\sqrt{e})$	$\nearrow$	

E12P4

3d)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x_n^{x_n})^{x_n} = e^{\frac{1}{n}\ln((\frac{1}{n})^{1/n})} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(\frac{1}{n})} = e^{-\frac{\ln(n)}{n^2}}$.

Or, par croissance comparée : $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc par composition : $e^{-\frac{\ln(n)}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi : $\underline{(x_n^{x_n})^{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n^{(x_n^{x_n})} = \exp\left(e^{x_n \ln(x_n)} \ln(x_n)\right)$

$= \exp\left(e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \ln(\frac{1}{n})\right)$

$= \exp\left(-\ln(n)\, e^{-\frac{\ln(n)}{n}}\right)$.

Or, par croissance comparée : $-\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc par composition : $e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Par produit : $-\ln(n)\, e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc par composition :

$\underline{x_n^{(x_n^{x_n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

4) a) $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ (k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = k \times k!}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 4a) :

$W_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$ car on reconnait une somme télescopique.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ W_n = (n+1)! - 1}$.

Ex 2 PS

4c) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $S_n = 2 + (n-2)(n+1)!$ ".

<u>Init</u> : $S_1 = 0^2 \times 0! = 0$ et $2 + (1-2)(1+1)! = 2 - 2 = 0$.

Donc $P(1)$ est vrai.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 k! = S_n + (n+1-1)^2 (n+1)!$$

$$\underset{(\text{par } P(n))}{=} 2 + (n-2)(n+1)! + n^2 (n+1)!$$

$$= 2 + (n^2+n-2)(n+1)!$$

$$\underset{(*)}{=} 2 + (n-1)(n+2)(n+1)!$$

$$= 2 + (n+1-2)(n+2)!$$

$(*)$: $(n-1)(n+2) = n^2 - n + 2n - 2 = n^2 + n - 2$.

Ceci montre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence : <u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 + (n-2)(n+1)!$</u>.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k! = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 1) k!$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2+1) k! - 2k \times k!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2+1) k! - 2 \sum_{k=1}^{n} k \times k! \quad (\text{linéarité})$$

$$= T_n - 2W_n.$$

Donc <u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_n - 2W_n$</u>.

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n + 2W_n = 2 + (n-2)(n+1)! + 2((n+1)! - 1)$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = n(n+1)!$</u>.

Ex 2 P6

5a) L'ensemble des résultats possible est $\underline{\Omega = [\![1,6]\!]^3}$
car un résultat est donné par le triplet (a,b,c) des faces tombées, éléments de $[\![1,6]\!]$.
Par théorème : $\underline{Card([\![1,6]\!]^3) = Card([\![1,6]\!])^3 = 6^3 = 216.}$

b) Un résultat contenant exactement les faces 2, 4 et 6
est donné par l'application bijective $f : \{1,2,3\} \rightarrow \{2,4,6\}$
qui, à un numéro de lancer associe la face obtenue.
Il y a donc autant de ces résultats que d'applications bijectives
$\{1,2,3\} \rightarrow \{2,4,6\}$. $Card(\{1,2,3\}) = Card(\{2,4,6\}) = 3$.
$\underline{\text{Il y a donc } 3! = 6 \text{ tels résultats.}}$

c) Soit C l'ensemble des résultats avec au moins une face de chaque parité.
$\bar{C}$ est l'ensemble des résultats dont toutes les faces ont la même parité.
Or, il y a 3^3 résultats dont toutes les faces sont paires car ces résultats sont ceux de $\{2,4,6\}^3$ et $Card(\{2,4,6\}^3) = 3^3$.
De même, $Card(\{1,3,5\}^3) = 3^3$.
Alors, $\bar{C} = \{2,4,6\}^3 \cup \{1,3,5\}^3$ et cette réunion est disjointe.
$$Card(\bar{C}) = 3^3 + 3^3 = 2 \times 3^3 = 54$$
Par passage au complémentaire :
$$Card(C) = Card(\Omega) - Card(\bar{C})$$
$$= 216 - 54 = 162.$$
$\underline{\text{Il y a 162 résultats avec au moins une face de chaque parité.}}$

Ex 3. P1.

1. $a \leq 1$ donc $a \in [0,1]$.

1^{er} cas : Si $a=1$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1^n}{n!} = \frac{1}{n!}$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (car $n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$).

2^{e} cas : Sinon, $a \in [0,1[$ donc $|a|<1$.

Ainsi, $\begin{cases} a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$. Par produit, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Conclusion : Si $a \leq 1$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\begin{cases} a > 1 \\ n! \geq 1 \end{cases}$ donc $u_n > 0$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$.

Alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{n+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a-1 < n$.

Posons $n_0 = \lfloor 2a-1 \rfloor + 1$. On a $n_0 \in \mathbb{N}$ (car $2a-1 > 1$ car $a > 1$),

et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \underset{(n_0 > 2a-1)}{\Rightarrow} n > 2a-1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} \underset{(u_n > 0)}{\Rightarrow} u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$.

On a donc bien trouvé un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n.$$

2. b) Montrons par récurrence : $\forall n \geq n_0$, $P(n) : u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$.

Initialisation. $\frac{1}{2^{n_0-n_0}} = \frac{1}{2^0} = 1$ donc $u_{n_0} \leq \frac{1}{2^{n_0-n_0}} u_{n_0}$, d'où $P(n_0)$.

Hérédité : Soit $n \geq n_0$ un entier.

Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par 2a), $n \geq n_0$ donc : $u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$.

Par $P(n)$: $u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$. Donc $\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$

Par transitivité : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n-n_0+1}} u_{n_0} = \frac{1}{2^{(n+1)-n_0}} u_{n_0}$.

D'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence : $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$.

Ex3P2.

2.c) Soit $n \geq n_0$ un entier. On a $u_n \geq 0$ et par 2b):

$$u_n \leq \frac{1}{2^n} \times 2^{n_0} u_0 .$$

Donc : $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n} \times 2^{n_0} u_0 .$

Or, $\begin{cases} 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{1}{2^n} \times 2^{n_0} u_{n_0} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ car $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \left(\left|\frac{1}{2}\right| < 1\right).$

Par le théorème des gendarmes :

$$\underline{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .}$$

3. La fonction f_n ainsi définie est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{n+1}'(x) = \frac{(n+1)\, x^n}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!}$$

$$= \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\underset{(j=k-1)}{=} \frac{x^n}{n!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = f_n(x) .$$

Ainsi, $\underline{f_{n+1}' = f_n} .$

4 a)

```
# fonction factorielle
def fact(n):
    P = 1
    for k in range(1,n+1):
        P = P*k
    return(P)

# fonction f
def f(n,x):
    S = (x**n)/fact(n)
    for k in range(n):
        S = S - (x**k)/fact(k)
    return(S).
```

Ex3P3.

4b).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
listeX= np.linspace(0, 5, 100)
listeY= [f(10,x) for x in listeX]
plt.plot(listeX, listeY)
plt.show()
```

5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) = \frac{x^1}{1!} - \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = x - 1.$

f_1 est affine croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$;
et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

f_1 est strictement croissante et s'annule uniquement en 1.

6.
Montrons par récurrence : "$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$" où l'on a posé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$P(n)$: "Il existe un unique réel positif, noté x_n, tel que $f_n(x_n) = 0$, et f_n est strictement négative sur $[0, x_n[$ et strictement positive sur $]x_n, +\infty[$".

Init : D'après la question 5, f_1 s'annulle uniquement en 1.
Donc il existe un unique réel $x_1 \geqslant 0$ tel que $f_1(x_1) = 0$, donné par $x_1 = 1$.
De plus, par croissance stricte de f_1 :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, x_1[,\ f(x) < f(x_1) = 0 \\ \forall x \in]x_1, +\infty[,\ f(x) > f(x_1) = 0 \end{cases}$$

Ceci prouve $P(1)$, d'où l'initialisation.

Ex3P4.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

D'après 3), f_{n+1} est dérivable et $f_{n+1}' = f_n$.
Par hypothèse de récurrence, on a donc le tableau de variation suivant.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_{n+1}' = f_n$		$-$	0	$+$	
f_{n+1}	-1	$\searrow$	$f_{n+1}(x_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

Par décroissance de f_{n+1} sur $[0, x_n]$:
$$\forall x \in [0, x_n], \quad f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(0) = -1. \qquad (*)$$
Donc f_{n+1} <u>ne s'annule pas sur $[0, x_n]$</u> et $f_{n+1}(x_n) \leq -1$.

De plus, f_{n+1} est continue (car polynomiale) et strictement croissante sur $[x_n, +\infty[$. Par théorème, f_{n+1} y est injective et
$$f_{n+1}([x_n, +\infty[) = [f_{n+1}(x_n), \lim_{x \to +\infty} f_{n+1}(x)[$$
$$= [f_{n+1}(x_n), +\infty[.$$
Enfin, $0 \in [f_{n+1}(x_n), +\infty[$ car $f_{n+1}(x_n) < 0$ (par $*$).

Ainsi, f_{n+1} <u>s'annule sur $[x_n, +\infty[$</u>, et ce <u>exactement une</u> fois par injectivité.
Finalement, f_{n+1} s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+$:
il existe un <u>unique réel positif x_{n+1}</u> tel que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Ex3pS.

Enfin, par croissance stricte de f_{n+1} sur $[x_n, +\infty[$:

$$\begin{cases} \forall x \in [x_n, x_{n+1}[, & f_{n+1}(x) < f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \\ \forall x \in]x_{n+1}, +\infty[, & f_{n+1}(x) > f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Cela complète l'étude de signe établie sur $[0, x_n]$, donc :

f_{n+1} est strictement <u>négative</u> sur $[0, x_{n+1}[$ et

strictement <u>positive</u> sur $]x_{n+1}, +\infty[$.

Ceci conclut l'hérédité.

<u>On a bien montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$.</u>

7. Ce tableau a été établi dans les questions précédentes.

Pour $n = 1$:

x	0		$+\infty$
f_1	-1	$\nearrow$	$+\infty$

et pour tout $n \geqslant 2$:

x	0		x_{n-1}		$+\infty$
$f_n' = f_{n-1}$		$-$	0	$+$	
f_n	-1	$\searrow$	$f_n(x_{n-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $x_n \neq 0$ car $f_n(0) = -1 \neq 0$. <u>Donc $x_n > 0$,</u> <u>et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.</u>

8. f_n est injective sur $\mathbb{R}_+$ car elle est strictement croissante.

Soit $n \geqslant 2$.

D'après la réponse à la question 6 présentée question 7 :

$$\begin{cases} f_{n-1}(x_{n-1}) < -1 \\ f_n([x_{n-1}, +\infty[) = [f_n(x_{n-1}), +\infty[\end{cases}$$

Donc $-1 \in f_n([x_{n-1}, +\infty[)$. Ainsi, -1 admet au moins

Ex3p6.

un antécédent α sur $[x_{n-1}, +\infty[$ par f_n, et alors : $f_n(0) = f_n(\alpha)$.

Mais $0 < x_{n-1} \leq \alpha$ (car $f_{n-1}(0) = -1$ donc $x_{n-1} \neq 0$).

Donc $\begin{cases} 0 \neq \alpha \\ f_n(0) = f_n(\alpha) \end{cases}$.

Ainsi, f_n n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+$ si $n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est injective sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $n = 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après les questions précédentes,

$$f_{n+1}(x_n) \leq -1 < f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

Par croissance stricte de f_n sur $[x_n, +\infty[$:

$$x_n < x_{n+1}.$$

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Par le théorème de la limite monotone, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge ou tend vers $+\infty$, et $(x_n)_n$ converge si et seulement si elle est majorée.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$0 \leq x_n < x_{n+1}$ par 9), donc par croissance sur $\mathbb{R}_+$ des fonctions $t \mapsto t^k$, pour tout $k \geq 0$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad x_n^k \leq x_{n+1}^k$$

D'où : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \dfrac{x_n^k}{k!} \leq \dfrac{x_{n+1}^k}{k!}$.

Par somme d'inégalités : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_n^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{n+1}^k}{k!}$.

Ex3p7.

Or, $\frac{x_{n+1}^n}{n!} > 0$ car $x_{n+1} > 0$.

Donc $v_{n+1} = \frac{x_{n+1}^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{n+1}^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{n+1}^k}{k!} \geqslant v_n$.

On a donc bien $v_n < v_{n+1}$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Enfin, v_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme somme de réels positifs.

11. a) Soit a un majorant de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$0 \leqslant x_n \leqslant a$ donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant a^n$.
Alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{x_n^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{n!} \\ \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ d'après la partie 1 } (a \geqslant 0 \text{ car } a \geqslant x_1 = 1). \end{cases}$$

Par le théorème des gendarmes, $\frac{x_n^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(x_n) = 0$ donc :

$$\frac{x_n^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_n^k}{k!} = 0$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{x_n^n}{n!}$.

D'après la question précédente : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ex3 p8.

12. D'après la question 11, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or, $(v_n)_n$ est croissante donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant v_1 = 1.$$

Si l'on avait $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on aurait donc, par passage à la limite des inégalités : $0 \geqslant 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, $(v_n)_n$ ne tend pas vers 0.

Par contraposition du résultat de 11., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Étant croissante, par convergence monotone.

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ex4P1

1a) $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable comme composée de fonctions usuelles dérivables, donc $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 0$).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{(1+x)e^{-x}}{x^2}$.

Donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) < 0}$ $\quad (1+x > 1,\ e^{-x} > 0$ et $x^2 > 0)$.

x	0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0

b) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$".

Init : Par hypothèse, $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est clair.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n existe et $u_n > 0$. Donc $u_n \in D_f =]0, +\infty[$.

Donc $\underline{u_{n+1} \text{ est bien défini}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, $\underline{u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n} > 0}$ car $\begin{cases} e^{-u_n} > 0 \\ u_n > 0 \text{ par } P(n) \end{cases}$.

D'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence : u_n existe et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

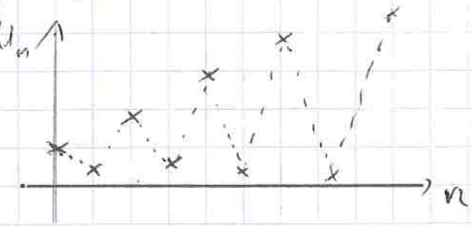
2) a)

```python
import numpy as np
def f(x):
    return (np.exp(-x)/x)
def rang_sup(a):
    u=1
    n=0
    while u<=a:
        n+=1
        u=f(u)
    return(n)
```

Ex4P2

b) Les termes d'indice pair de u semblent de plus en plus grands, ceux d'indice impair semblent de plus en plus proche de 0.

On conjecture <u>ni convergence ni monotonie</u>, et un comportement représenté par le graphique suivant :



3 a) g est dérivable sur son domaine de définition par opérations sur les fonctions $x \mapsto -x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ car : $\begin{cases} e^{-x} > 0 \text{ donc } -e^{-x} < 0 \\ -2x \leq 0 \text{ car } x \geq 0 \end{cases}$

<u>D'où le tableau de variations :</u>

x	0	$+\infty$
g	1	$\searrow -\infty$

b) g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Par théorème, g induit une bijection : $[0,+\infty[\longrightarrow g([0,+\infty[)$

et $g([0,+\infty[) =]\lim_{x \to +\infty} g(x), g(0)]$

$=]-\infty, 1]$.

Donc <u>g induit une bijection $[0,+\infty[\longrightarrow]-\infty, 1]$</u>.

c) $0 \in]-\infty, 1]$ donc d'après la question précédente, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

Cette solution est non nulle car $g(0) = 1 \neq 0$.

Ex4P3

Donc : $\exists ! x \in]0,+\infty[,\ g(x)=0$.

Or, $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x)=x \iff \frac{e^{-x}}{x}=x \iff e^{-x}=x^2$

$\iff e^{-x}-x^2=0$

$\iff g(x)=0$.

Donc : $\underline{\exists ! x \in]0,+\infty[,\ f(x)=x}$.

d) $g(1)=e^{-1}-1^2=\frac{1}{e}-1<0$ car $e>1$, et

$g(e^{-1})=e^{-e^{-1}}-e^{-2}$.

Or, $\frac{1}{e}<2$ donc $-e^{-1}>-2$ donc $e^{-e^{-1}}>e^{-2}$

donc $g(e^{-1})>0$.

Ainsi :

$$g(e^{-1})>g(\alpha)=0>g(1).$$

Par décroissance stricte de g :

$$\underline{e^{-1}<\alpha<1}.$$

4.a) Notant $D_f=]0,+\infty[$ le domaine de f, $h=f\circ f$ a pour domaine $D_h=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$.

Donc $D_h=\{x\in]0,+\infty[\mid f(x)\in]0,+\infty[\}$.

Or, f est à valeurs strictement positives ($\forall x>0$, $\begin{cases} e^{-x}>0 \\ x>0 \end{cases}$).

Donc $\underline{D_h=]0,+\infty[}$.

De plus, $\underline{h \text{ est strictement croissante}}$ en tant que composée de fonctions strictement décroissantes.

Ex4P4 (4.b)

$u_0 = 1$ donc $u_1 = f(u_0) = e^{-1}$.

Donc $u_2 = f(u_1) = \dfrac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$.

Or, $\frac{1}{e} < 1$ (car $e > 1$), donc :

$1 - e^{-1} > 0$

d'où $e^{1-e^{-1}} > e^0 = 1$.

Ainsi : $\underline{u_2 = e^{1-e^{-1}} > u_1 = 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$

$= f(u_{2n+1})$

$= f(f(u_{2n}))$.

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = h(v_n)$.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$v_{n+1} > v_n$".

Init : D'après 4b), $u_2 > u_0$. Donc $v_1 > v_0$, d'où $P(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, $v_{n+1} > v_n$. Par croissance stricte de h :

$h(v_{n+1}) > h(v_n)$.

Donc $v_{n+2} > v_{n+1}$, d'où $P(n+1)$. D'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$. $\underline{v \text{ est croissante}}$.

Ex4 P5

4.d) Calculons u_3 :

$$u_3 = f(u_2) = \frac{e^{-e^{1-\frac{1}{e}}}}{e^{1-\frac{1}{e}}} = e^{-e^{1-\frac{1}{e}}-1+\frac{1}{e}}.$$

Montrons $u_3 < u_1$.

$$u_3 < u_1 \Leftrightarrow \exp\left(-e^{1-\frac{1}{e}}-1+\frac{1}{e}\right) < \exp(-1)$$

$$\Leftrightarrow -e^{1-\frac{1}{e}}-1+\frac{1}{e} < -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} < e^{1-\frac{1}{e}}$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1-\frac{1}{e}.$$

Or, la dernière inégalité est vraie car $\begin{cases} -1 < 0 \\ 1-\frac{1}{e} > 0 \text{ car } \frac{1}{e} < 1, \end{cases}$ car $e > 1$.

Donc $u_3 < u_1$.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$w_{n+1} < w_n$".

Init : $w_1 = u_3$ et $w_0 = u_1$.

D'après ce qui précède, $w_1 < w_0$, d'où $P(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, $w_{n+1} < w_n$.

Par croissance stricte de h : $h(w_{n+1}) < h(w_n)$.

Or, $h(w_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} = w_{n+1}$

et de même, $h(w_{n+1}) = w_{n+2}$.

Donc $w_{n+2} < w_{n+1}$, d'où $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

Ex4P6 :

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} < w_n$.

$w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4.e) $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 (car u est à termes positifs).

Par le théorème de la limite monotone, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

De plus, par décroissance :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{2n+1} \leq u_{2\times 0+1} = u_1 = e^{-1}.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq u_{2n+1} \leq e^{-1}$.

Par passage à la limite des inégalités :

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} \leq e^{-1}.$$

Donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, et $\ell \in [0, e^{-1}]$.

5-a) $$\forall x > 0,\ h(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\, e^{x - \frac{e^{-x}}{x}}$$
$$= x\, e^{\frac{1}{x}(x^2 - e^{-x})}$$
$$= x\, e^{-\frac{1}{x} g(x)}.$$

D'où : $\forall x > 0,\ h(x) = x\, e^{-\frac{g(x)}{x}}$.

b) $$\forall x > 0,\ h(x) = x \iff x\, e^{-\frac{g(x)}{x}} = x$$
$$\underset{(x\neq 0)}{\iff} e^{-\frac{g(x)}{x}} = 1$$
$$\iff -\frac{g(x)}{x} = \ln(1) \iff -\frac{g(x)}{x} = 0 \iff g(x) = 0.$$

Ex4P7

Or, l'équation $g(x)=0$ admet comme unique solution α, par 3c).

Donc :

l'unique solution de $h(x)=x$ est α.

c) On sait que $w_n = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0, e^{-1}]$.

Supposons par l'absurde $\ell \neq 0$.

On aurait :

$$f(w_n) = \frac{e^{-w_n}}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\ell}}{\ell} \quad \text{par opération } (\ell \neq 0).$$

Or, $\frac{e^{-\ell}}{\ell} \neq 0$ donc : $\begin{cases} e^{-f(w_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{e^{-\ell}}{\ell}} \\ \frac{1}{f(w_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\frac{e^{-\ell}}{\ell}} \end{cases}$.

Enfin par produit :

$$f(f(w_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\frac{e^{-\ell}}{\ell}}}{\frac{e^{-\ell}}{\ell}} = f\circ f(\ell).$$

On aurait donc $h(w_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(\ell)$.

Mais $h(w_n) = w_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Par unicité de la limite, on aurait donc :

$\ell = h(\ell)$, et $\ell > 0$.

On aurait alors $\ell = \alpha$, d'après 5b).

C'est absurde, car $\ell \leq e^{-1}$ et $e^{-1} < \alpha$ d'après 3d).

Ainsi, $\ell = 0$: $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ex 4 P8

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = h(v_n)$, et $(v_n)_n$ est croissante (4c).
Par le théorème de convergence monotone, v converge ou v a pour limite $+\infty$.

Supposons par l'absurde que v converge, et notons alors $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Par croissance de v : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0 = 1$.
Par passage à la limite, on aurait donc $l' \geq 1$.
Donc $l' \in]0, +\infty[= D_h$.
Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente, on aurait alors :

$$\begin{cases} v_{n+1} = h(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} h(l'), \text{ et} \\ v_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l' \quad \text{car } v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'. \end{cases}$$

Par unicité de la limite, on aurait $l' = h(l')$
donc en cas $l' = \alpha$, ce qui contredit :

$$\begin{cases} \alpha < 1 \quad (q° 3d) \\ l' \geq 1 \end{cases}.$$

Ainsi, v ne converge pas.

Par convergence monotone : $u_{2n} = v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

6. u n'a pas de limite car par théorème, si u avait une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, on aurait

$$\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \end{cases}. \quad \text{Or, } \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}, \text{ et il y a unicité des limites.}$$

Ex 5 p1

1.

```
Paquet Classique = []
for f in ["C", "Ca", "T", "P"] :
    for h in range(1, 14) :
        Paquet Classique.append((f, h))
```

2.

```
def MainsEgales(M1, M2):
    if len(M1) != len(M2) :
        return(False)
    for c in M1 :
        if not( c in M2) :
            return (False)
    return(True)
```

3.

```
def Famille(f, Pa) :
    F = []   # contiendra le paquet voulu
    # ajout une à une des cartes de la famille
    for c in Pa :
        if c[0] == f :
            F.append(c)
    return(F)
```

ExSP2

4.
```python
def MainCoeur(Paquet):
    PC = Famille("C", Paquet) # Cartes de coeur
    L = [] # liste voulue
    for C1 in PC: # C1 parcourt les cartes de coeur
        # ajout des mains avec C1
        for C2 in Paquet: # seconde carte
            if C2[0] != "C": # exactement 1 carte de coeur
                L.append([C1, C2])
    return(L)
```

5.
```python
def Points(C):
    if C[0] == "C":
        return 4*C[1]
    elif C[0] == "Ca":
        return C[1]
    elif C[0] == "T":
        return 2*C[1]
    else:
        return 3*C[1]
```

6.
```python
def PointsTotaux(Paquet):
    S = 0
    for c in Paquet:
        S += Points(c)
    return(S)
```

ExSP3

7.
```
def TriPoints (Paquet):
    n = len(Paquet)
    for _ in range(n-1):
        for i in range (n-1):
            if Points(Paquet[i]) < Points(Paquet[i+1]):
                Paquet[i], Paquet[i+1] = Paquet[i+1], Paquet[i]
```

```
import numpy.random as rd
```

8.
```
def Mélange(Paquet):
    n = len(Paquet)  # nombre de cartes
    for k in range (5000):  # faire 5000 fois:
        # choix de 2 cartes aléatoires
        i1 = rd.randint(0,n)
        i2 = rd.randint(0,n)
        # Permutation
        Paquet[i1], Paquet[i2] = Paquet[i2], Paquet[i1]
```

9.
```
def TireCarte(P):
    c = P[0]
    del P[0]
    return (c)
```

ExSP4

10.

```
def SimuleBataille(Paquet):
    # mélange
    Mélange(Paquet)
    # Formation des Paquets joueurs
    n = len(Paquet)  # nb de cartes
    P1, P2 = Paquet[0:n//2], Paquet[n//2:n]
    C1, C2 = 0, 0                                   # Cookies
    for k in range(n//2):
        # manche numero k
        j1, j2 = TireCarte(P1), TireCarte(P2)
        if Points(j1) > Points(j2):
            C1 += 1
        if Points(j2) > Points(j1):
            C2 += 1
        print("Joueur 1 :", C1, "Cookies, Joueur 2 :", C2,
              "cookies.")
    if C1>C2:
        print("le joueur 1 a gagné")
    elif C2>C1:
        print("le joueur 2 a gagné")
    else:
        print("Egalité")
```