Programme de colle n° 13 : Fin du dénombrement, début des limites de fonctions.

Semaine du lundi 6 janvier.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Dénombrement : chapitre complet

13.1 Ensembles finis, propriétés du cardinal, permutations et factorielles : se reporter au programme de colle précédent.

13.2 Coefficients binomiaux : Définition ($\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n), symétrie des coefficients binomiaux. Formule du triangle de Pascal, triangle de Pascal. Formule donnant $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles. Formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

13.3 Formule du binôme de Newton, exemples d'utilisations.

Limites de fonctions, premier volet sur la continuité

13.4 Adhérence d'un intervalle.

L'adhérence $\bar{I}$ d'un intervalle I est défini comme la réunion de I et de ses bornes finies. Aucune question théorique n'est attendue sur cette notion.

13.5 limite finie d'une fonction définie sur un intervalle I en un point $x_0 \in \bar{I}$. Si une fonction f définie en un point x_0 admet une limite finie l en x_0 , alors $l = f(x_0)$ et on dit que f est continue en x_0 . Limite infinie en un point.

13.6 Extension des notions de limites en x_0 au cas d'une fonction définie sur un intervalle épointé de x_0 . Limite à droite, limite à gauche en un point.

Python

13.7 Approximations numériques de solutions d'équations : recherche par balayage, recherche par dichotomie.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de permutation d'un ensemble. Donner la proposition donnant le nombre de permutation d'un ensemble fini E . Démontrer que si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, alors toute injection de E vers F est une bijection.
2. Définir la notion de coefficient binomial. Énoncer et démontrer la proposition (37) donnant la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.
3. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.
4. Énoncer et démontrer la formule donnant les coefficients binomiaux en termes de factorielles.
5. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton. *Calculs avec points de suspensions autorisés.*
6. Énoncer et démontrer la proposition et définition (7) définissant la notion de fonction continue en un point.
7. Montrer que $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.
8. Écrire un code Python fournissant une approximation à 10^{-6} près d'une solution de l'équation $xe^x = 1$, avec une recherche par balayage. On justifiera tout ce qui est nécessaire à l'application de cet algorithme.
9. Écrire un code Python fournissant une approximation à 10^{-6} près d'une solution de l'équation $e^{-x^2} = 2x$, avec une recherche par dichotomie. On justifiera tout ce qui est nécessaire à l'application de cet algorithme.