Programme de colle n^o 14 : Limites de fonctions.

*Semaine du lundi **13 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

La grande majorité des résultats de ce chapitre est admise.

Généralités sur les limites

14.1 Adhérence d'un intervalle.

L'adhérence $\bar{I}$ d'un intervalle I est défini comme la réunion de I et de ses bornes finies. Aucune question théorique n'est attendue sur cette notion.

14.2 limite finie d'une fonction définie sur un intervalle I en un point $x_0 \in \bar{I}$. Si une fonction f définie en un point x_0 admet une limite finie l en x_0, alors $l = f(x_0)$ et on dit que f est continue en x_0. Limite infinie en un point.

14.3 Extension des notions de limites en x_0 au cas d'une fonction définie sur un intervalle épointé de x_0. Limite à droite, limite à gauche en un point. Lien entre limite et limites à droites et à gauche. Prolongement par continuité d'une fonction. Exemple : prolongement par continuité en 0 des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha > 0$ n'est pas entier.

14.4 Voisinage de $-\infty$, de $+\infty$. Limites en $-\infty$, en $+\infty$ d'une fonction réelle.

14.5 Voisinage d'un point, voisinage à droite ou à gauche (épointé) d'un point, voisinage de $-\infty$, de $+\infty$. Fait : si deux fonctions f et g coïncident sur un voisinage de x_0 (pouvant désigner un réel, une limite à droite ou à gauche, ou un infini), alors dès que ça fait sens :

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \iff g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$$

(prop. 35).

14.6 Unicité de la limite, notation lim. Passage à la limite des inégalités.

Limites et calculs

14.7 Sommes, produits de limites. Les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

14.8 Limites nulles par valeurs positives, par valeurs négatives. Limites et passage à l'inverse.

14.9 Composition de limites. Continuité et autres limites des fonctions usuelles.

14.10 Levée des formes indéterminées : croissance comparée dans le cadre des fonctions réelles. Limites par taux d'accroissement de l'exponentielle (en 0) et du logarithme (en 1).

14.11 Composition d'une suite par une fonction.

Théorèmes d'existence de limites

14.12 Le théorème des gendarmes. Le théorème de comparaison. Le théorème de la limite monotone.

Continuité sur un intervalle

14.13 Tout intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points. Si deux fonctions f et g coïncident sur un intervalle ouvert I, alors f est continue sur I si et seulement si g l'est. Application à l'étude de la continuité de fonctions définies par morceaux.

Asymptotes des fonctions réelles (non au programme pour les élèves passant lundi)

14.14 Asymptote verticale, asymptote horizontale à la courbe d'une fonction réelle.

14.15 Asymptote oblique à la courbe d'une fonction réelle : définition, proposition donnant une méthode pour étudier l'existence d'une asymptote oblique.

Python

14.16 Approximation de solutions d'équations par dichotomie avec un balayage préalable pour déterminer un segment avec changement de signe.

14.17 Méthode de Newton pour approximer une solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction dérivable, en connaissance d'un intervalle contenant une solution sur lequel f' ne s'annule pas.

Pas de résultat général sur les conditions de convergence et la vitesse de cette méthode.

14.18 Utilisation de majorations dans le cadre d'une étude d'une suite convergente pour fournir une approximation de sa limite.

Quelques questions de cours

1. Montrer que toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner toutes les limites des fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, d'abord pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, puis pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en démontrer ce second point.
3. Énoncer le théorème de croissance comparée pour les fonctions réelles. Déterminer la limite de la suite $(e^{\sqrt{n}}/n^2)_n$.
4. Énoncer et démontrer la proposition donnant l'éventuelle limite de la composée d'une suite réelle par une fonction réelle.
5. Énoncer et démontrer la proposition donnant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto (1+1/x)^x$.
6. Énoncer le théorème des gendarmes (pour les fonctions réelles).
7. Énoncer le théorème de comparaison (pour les fonctions réelles).
8. Énoncer le théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles).
9. Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
10. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = x^5 - 123x - 123$. Justifier que f change de signe sur $\mathbb{R}_+$. Écrire un code Python permettant de fournir une approximation à 10^{-6} près d'une solution de $f(x) = 0$ par dichotomie. On pourra utiliser un balayage grossier pour initier la dichotomie.