TD de mathématiques n°11 : Probabilités finies

Pour commencer

Équiprobabilité

Exercice 1 On lance trois fois successivement un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note dans l'ordre les chiffres obtenus.

(a) Donner un espace probabilisé fini modélisant cette expérience aléatoire.

(b) Déterminer les probabilités de réalisation des évènements :

(i) A : "obtenir un triple".

(ii) B : "obtenir un double, mais pas un triple".

(iii) C : "obtenir trois numéros différents".

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois successivement un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note en résultat les chiffres obtenus, dans l'ordre où ils apparaissent.

(a) Déterminer un univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.

(b) Déterminer les probabilités de réalisation des évènements :

(i) A : "ne jamais obtenir le chiffre 6 "

(ii) B : "obtenir au moins une fois le chiffre 1"

(iii) C : "n'obtenir que des chiffres impairs"

(iv) D : "obtenir au moins une fois un chiffre pair et au moins une fois un chiffre impair"

(v) E : "obtenir le chiffre 6 pour la première fois lors du dernier lancer"

Exercice 3 *Si le 4 vous pose problème, regardez celui-ci.* On effectue quatre lancers successifs d'une pièce équilibrée et on note dans l'ordre les côtés obtenus.

(a) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.

(b) Déterminer les probabilités de réalisation des évènements :

(i) A : "ne jamais obtenir Pile"

(ii) B : "obtenir au moins une fois chaque côté de la pièce"

(iii) C : "obtenir autant de fois Pile que Face"

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On effectue n lancers successifs d'une pièce équilibrée et on note dans l'ordre les côtés obtenus.

(a) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.

(b) Déterminer les probabilités de réalisation des évènements :

(i) A : "obtenir au moins une fois le côté Face"

(ii) B : "obtenir au moins une fois chaque côté de la pièce"

(iii) C : "obtenir autant de fois Pile que Face"

(iv) D : "obtenir Face pour la première fois au lancer numéro n "

(v) E : "obtenir un changement de côté de la pièce pour la première fois au lancer numéro n "

Exercice 5 On tire simultanément au hasard 3 boules dans une urne contenant 4 boules rouges (notées R_1 à R_4), 5 boules vertes (notées V_1 à V_5) et 7 boules jaunes (notées J_1 à J_7). On note en résultat les boules tirées (numéro et couleur).

(a) Quel est le cardinal de l'univers de cette expérience aléatoire? Quelle probabilité permet de modéliser cette expérience?

(b) Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement M : "obtenir un tirage monocolore".

(c) Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement T : "obtenir un tirage tricolore".

(d) Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement B : "obtenir un tirage bicolore".

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire simultanément trois boules dans cette urne et on note en résultat les numéros obtenus.

(a) Déterminer le cardinal de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les probabilités de réalisation des évènements :

(i) A : "le plus petit numéro tiré est égal à k ".

(ii) B : "le plus grand numéro tiré est égal à k ".

(iii) C : "le numéro tiré qui n'est ni le plus grand ni le plus petit est égal à k ".

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On effectue n lancers successifs indépendants avec une pièce équilibrée et on note en résultat les côtés de la pièce obtenus, dans l'ordre.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note A_k l'évènement : "on a obtenu pour la première fois Pile puis Face aux lancers k et $k+1$".

(a) Donner un univers modélisant cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.

(b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Quels sont les résultats qui réalisent l'évènement A_k ?

(c) En déduire, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la valeur de $P(A_k)$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et 1 boule noire.

On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne.

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, déterminer $P(A_k)$ où A_k est l'évènement : "on tire la boule noire au k-ième tirage".

Exercice 9 On lance trois fois de suite une pièce truquée qui tombe deux fois plus souvent sur Pile que Face.

(a) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal. Que dire de la probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant cette expérience aléatoire?

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement : "n'obtenir que des Pile".

(c) Déterminer la probabilité de l'évènement : "obtenir au moins une fois Pile".

(d) Déterminer la probabilité de l'évènement : "obtenir exactement une fois Pile".

Exercice 10 On lance une pièce déséquilibrée qui tombe deux fois plus souvent sur Pile que sur Face. Si elle tombe sur Pile, on pioche une bille dans une urne contenant 3 billes rouges, 3 billes bleues et 4 billes noires. Si elle tombe sur Face, on pioche une bille dans une urne contenant 3 billes rouges et 2 billes noires. Le résultat de l'expérience est la couleur de la bille obtenue.

(a) Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement A : "obtenir une bille rouge".

(b) Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement B : "obtenir une bille qui n'est pas noire".

(c) Au lieu de piocher une unique bille dans l'urne sélectionnée, on en pioche deux simultanément. Déterminer la probabilité de réalisation de l'évènement C : "on obtient deux billes rouges".

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant une boule rouge et une boule blanche. On effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne et pour chaque tirage donnant une boule blanche, on ajoute une boule rouge supplémentaire dans l'urne avant le tirage suivant.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement A : "ne tirer que des boules rouges".

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement B : "ne tirer que des boules blanches".

(c) Déterminer la probabilité de l'évènement C : "obtenir une unique boule rouge, lors du dernier tirage".

(d) Déterminer la probabilité de l'évènement D : "obtenir une unique boule blanche, lors du dernier tirage".

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant deux boules rouges et une boule noire. On effectue n tirages successifs dans cette urne, chaque boule noire tirée étant remise et chaque boule rouge tirée étant remplacée par une boule boule noire.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement A : "ne tirer aucun boule rouge".

(b) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité de l'évènement B_k : "tirer une unique boule rouge, lors du k-ième tirage" et en déduire la probabilité de l'évènement B : "tirer une unique boule rouge".

(c) Déterminer la probabilité de l'évènement C : "il ne reste aucune boule rouge".

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne numérotée 0 contient, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exactement k jetons numérotés k. On dispose ensuite n urnes numérotées de 1 à n de sorte que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules rouges.

On tire au hasard un jeton dans l'urne numérotée 0 : si le jeton tiré porte le numéro k, alors on tire au hasard une boule (resp. deux boules) dans l'urne numérotée k.

Calculer $P(B)$ où B est l'évènement : "la boule tirée est blanche" (resp. "les deux boules tirées sont blanches").

Exercice 14 Une bille se déplace sur les sommets d'un triangle ABC. On la place initialement en A. Si elle est en A à un instant $n \in \mathbb{N}$, elle va en B à l'instant $n+1$. Si elle est en B à l'instant n, elle va à l'instant $n+1$ en A avec probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si elle est en C à l'instant n, alors elle y reste. Déterminer la probabilité p_n pour que la bille arrive pour la première fois en C à un instant $n \in \mathbb{N}$. *On cherchera une relation de récurrence vérifiée par* $(p_n)_n$.

Exercice 15 Une maladie touche un individu sur 100. Un test permet de dépister cette maladie correctement dans 95% des cas, mais fournit un "faux-positif" dans $0,1\%$ des cas. Un individu est testé positif.

Quelle est la probabilité qu'il soit réellement malade?

Exercice 16 On considère un ensemble formé de 100 dé, dont exactement 25 sont truqués de sorte à ce que la probabilité d'obtenir 6 soit égale à $\frac{1}{2}$, tandis que les autres sont équilibrés.

(a) On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient 6.

Quelle est la probabilité que l'on ait lancé un dé truqué?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard, puis on le lance n fois successivement et on obtient n fois 6 . Quelle est la probabilité que l'on ait lancé un dé truqué?

Indépendance

Exercice 17 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Les évènements A et B suivants sont-ils indépendants?

(a) A : "tirer un roi" et B : "tirer un As".

(b) A : "tirer un roi" et B : "tirer une figure".

Exercice 18 Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B, C trois évènements.

(a) On suppose que A et B sont indépendants, ainsi que A et C et enfin que $B \cap C = \emptyset$. Montrer que A est indépendant de $B \cup C$.

(b) On suppose que A et B sont indépendants, ainsi que A et C et enfin que $B \cup C = \Omega$. Montrer que A est indépendant de $B \cap C$.

Exercice 19 Une urne U contient 3 boules rouges et 7 boules blanches et une urne V contient 3 boules rouges et 2 boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on tire l'une après l'autre et avec remise deux boules de l'urne choisie. Soit R_1 l'évènement : "la première boule tirée est rouge" et R_2 l'évènement : "la seconde boule tirée est rouge".

(a) Déterminer $P(R_1)$ et $P(R_2)$.

(b) Déterminer $P_{R_1}(R_2)$. Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants?

Exercice 20 On lance 3 dés équilibrés D_1, D_2 et D_3 à 6 faces numérotées de 1 à 6 .

Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note A_k : "le maximum des résultats de D_1 et D_2 est inférieur ou égal à k " et également B_k : "le minimum des résultats de D_2 et D_3 est supérieur ou égal à k ".

(a) Calculer $P(A_k)$ et $P(B_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de k les évènements A_k et B_k sont-ils indépendants?

Exercice 21 Une urne contient 2 boules noires et 3 boules rouges. On effectue quatre tirages successifs avec remise et on considère les évènements A : "les deux premiers tirages sont noirs", B : "les deux derniers tirages sont noirs", C : "le second et troisième tirages sont rouges", D : "les quatre tirages sont de la même couleur".

(a) Les quatre évènements ci-dessus sont-ils mutuellement indépendants?

(b) Parmi les quatre évènements ci-dessus, lesquels sont deux à deux indépendants?

Suites et probabilités

Exercice 22 On dispose d'une urne blanche U contenant 2 boules rouges et 6 boules blanches et d'une urne rouge V contenant 4 boules rouges et 2 boules blanches. On effectue une infinité de tirages successifs avec remise en tirant initialement une boule dans l'une des deux urnes choisie au hasard, puis à chaque tirage suivant, on tire une boule dans l'urne dont la couleur est celle de la boule tirée au tirage précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'évènement : "la n-ième boule tirée est rouge" et on pose $p_n = \mathbb{P}(R_n)$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de p_n en fonction de n.

Exercice 23 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N urnes $U_1, \ldots, U_N$ contenant chacune une boule blanche et une boule noire. On tire une boule dans U_1, que l'on place dans U_2, puis on tire une boule dans U_2, que l'on place dans $U_3, \ldots$ puis l'on tire une boule dans U_{N-1}, que l'on place dans U_N, puis l'on tire une boule dans U_N. Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on considère l'évènement B_n : "la boule tirée dans U_n est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

(a) Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, établir une relation entre p_n et p_{n+1}.

(b) En déduire, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, une expression explicite de p_n en fonction de n.

Exercice 24 On dispose de deux pièces truquées : la première tombe sur Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et la seconde tombe sur Pile avec probabilité $\frac{2}{5}$. On choisit une pièce au hasard, que l'on lance ensuite successivement jusqu'à obtenir Face; on change alors de pièce et ainsi de suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'évènement : "On lance la première pièce au n-ième lancer" et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ (on admettra, ce qui est assez intuitif, que $p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) En déduire explicitement p_n en fonction de n.

Exercice 25 On considère deux distributeurs de café A et B pour lesquels on sait à force d'habitude qu'ils délivrent un café correct de façon aléatoire, une fois sur deux pour le distributeur A et deux fois sur trois pour le distributeur B. Une personne adopte la stratégie suivante pour choisir chaque jour un distributeur de café :

- Au jour numéro 1, il choisit au hasard le distributeur A ou B.
- Chaque jour suivant, s'il a obtenu un café correct la veille, alors il conserve le même distributeur, tandis que dans le cas contraire il change de distributeur.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n d'obtenir un café correct le jour numéro n.

Exercice 26 Soient $a, b \in]0,1[$. Une machine est régie par les règles de fonctionnement suivantes :

- Si la machine fonctionne à l'instant n, alors la probabilité qu'elle soit en panne à l'instant $n+1$ est a.
- Si la machine est en panne à l'instant n, alors la probabilité qu'elle fonctionne à l'instant $n+1$ est b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement "la machine fonctionne à l'instant n " et $p_n = \mathbb{P}(M_n)$.

Déterminer explicitement p_n en fonction de n sachant que la machine fonctionne à l'instant $n = 0$.

Exercice 27 Le service de gestion des ressources humaines d'une entreprise souhaite étudier la probabilité qu'un salarié soit absent pour cause de maladie. Au jour $n = 0$, le salarié est présent. À chaque jour suivant, le salarié a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber malade et donc d'être absent, et inversement une probabilité $q \in]0,1[$ de guérir s'il est malade, et donc de revenir travailler le lendemain (on suppose que dans cette entreprise tous les jours sont ouvrés).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement : "le salarié est malade au jour n " et on pose $p_n = \mathbb{P}(M_n)$.

(a) Déterminer la valeur de p_1.

(b) Déterminer soigneusement la valeur de p_2.

(c) Sachant que le salarié était absent pour cause de maladie au jour $n = 2$, quelle est la probabilité qu'il ait déjà été absent pour le même motif au jour $n = 1$?

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer soigneusement p_{n+1} en fonction de p_n.

(e) En déduire explicitement p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) Déterminer soigneusement $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 28 On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des 3 sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé aléatoire suivant :

- À la première seconde, la particule se pose sur l'un des sommets A, B ou C de manière équiprobable.
- si la particule se trouve en A, alors à la seconde suivante, elle se trouvera sur l'un des trois sommets de manière équiprobable.
- si la particule se trouve en B, alors elle y reste.
- si la particule se trouve en C, alors à la seconde suivante, elle reste en C une fois sur 3 et ira 7 fois plus souvent en B qu'en A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "à la n-ième seconde, la particule se trouve en A" et on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$. On définit de manière similaire les évènements B_n et C_n et les nombres $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

On admettra que pour tout $n \geq 1, a_n \neq 0, b_n \neq 0$ et $c_n \neq 0$.

(a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1, c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n$.

(c) En déduire explicitement c_n en fonction de n.

(d) En déduire explicitement a_n et b_n en fonction de n.

Pour continuer

Équiprobabilité

Exercice 29 On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 et n boules numérotées de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$). On range au hasard les n boules dans les 3 urnes, et on note les numéros des urnes dans lesquelles ont été rangées chacune des boules dans l'ordre de leurs numéros.

(a) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement A : "l'urne U_1 est vide".

(c) Déterminer la probabilité de l'évènement B : "l'une des urnes au moins est vide".

(d) Déterminer la probabilité de l'évènement C : "aucune urne n'est vide".

Exercice 30 *Généralisation du 6.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire simultanément p boules dans cette urne. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement A : "on a tiré la boule numéro k " (on attend une réponse simplifiée).

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement B : "tous les numéros tirés sont inférieurs ou égaux à k ".

(c) Déterminer la probabilité de l'évènement C : "le plus grand numéro tiré est égal à k ".

(d) Déterminer la probabilité de l'évènement D : "tous les numéros tirés sont supérieurs ou égaux à k ".

(e) Déterminer la probabilité de l'évènement E : "le plus petit numéro tiré est égal à k ".

Probabilités conditionnelles

Exercice 31 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs sans remise dans cette urne. Déterminer la probabilité de réalisation des évènements :

(a) A : "toutes les boules tirées sont blanches"

(b) B : "au moins une boule tirée est blanche"

Exercice 32 On considère 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune une boule blanche et une boule noire. On tire une boule dans U_1, que l'on place dans U_2, puis on tire une boule dans U_2, que l'on place dans U_3, puis l'on tire une boule dans U_3.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement A : "la seconde boule tirée est blanche".

(b) Déterminer la probabilité de l'évènement B : "la troisième boule tirée est blanche".

Exercice 33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une pièce truquée avec probabilité d'obtenir Face égale à $\frac{2}{3}$.

On effectue n lancers successifs indépendants de la pièce. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note A_k l'évènement : "on a obtenu pour la première fois Pile-Face aux lancers k et $k+1$ ".

(a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Quels sont les résultats qui réalisent l'évènement A_k ?

(b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la valeur de $P(A_k)$.

Exercice 34 Lors d'une interrogation, un étudiant se retrouve confronté à une question pour laquelle n réponses sont possibles et une seule est correcte. La probabilité que l'étudiant connaisse avec certitude la bonne réponse est égale à $p \in]0, 1[$. On suppose que si l'étudiant ne connaît pas avec certitude la bonne réponse, il en choisit une au hasard parmi les n proposées.

Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse avec certitude?

Indépendance

Exercice 35 Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \Omega$ deux évènements.

(a) On suppose que A et B sont indépendants.

Montrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants, ainsi que $\bar{A}$ et B et ainsi également que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

(b) On suppose que $\mathbb{P}(B) \in \{0, 1\}$. Montrer que A et B sont indépendants.

(c) Montrer que A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B})\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Exercice 36 On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces et on considère les évènements :

- A : "le premier résultat est pair".
- B : "le second résultat est pair".
- C : "les deux résultats ont même parité".

(a) Montrer que les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Qu'en déduire sur les événements A, B et C?

(c) Montrer que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.

Exercice 37 On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans cette urne et on considère les évènements A : "le numéro tiré est pair" et B : "le numéro tiré est multiple de 3". Les évènements A et B sont-ils indépendants :

(a) dans le cas $n = 12$?

(b) dans le cas $n = 13$?

Suites et probabilités

Exercice 38 Une information est transmise au sein d'une population. À chaque étape de transmission d'une personne à une autre, la probabilité que l'information soit transmise de manière correcte est égale à $p \in]0, 1[$, tandis que l'information contraire est transmise avec probabilité $1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'après n transmissions, l'information soit correcte.

(*a*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

(*b*) Déterminer explicitement p_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 39 Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste suffisamment motivé le lendemain pour que l'a probabilité qu'il fume soit $\frac{1}{4}$. S'il fume un jour donnée, alors la probabilité qu'il fume encore le lendemain est notée $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité de l'évènement : "le fumeur fume au jour n".

(*a*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.

(*b*) Déterminer explicitement p_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 40 Un individu appelé Monsieur X effectue chaque jour le trajet de son domicile jusqu'à son travail. Il dispose de deux moyens de transport, le bus et le métro, et choisit chaque jour l'un ou l'autre selon le protocole suivant :

- il prend le bus le jour 1 .
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il a pris le bus le jour n et que celui-ci était en retard, alors il prend le métro le jour $n+1$ et s'il a pris le bus le jour n et que celui-ci était à l'heure, alors il reprend le bus le jour $n+1$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il a pris le métro le jour n, alors il choisit au hasard de manière équiprobable de prendre le bus ou le métro le jour $n+1$.

De plus, une étude statistique permet d'estimer que le bus est en retard de façon aléatoire un jour sur cinq.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements B_n : "Monsieur X prend le bus le jour n ", M_n : "Monsieur X prend le métro le jour n " et R_n : "le bus est en retard le jour n ".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ et on souhaite déterminer explicitement p_n en fonction de n.

On supposera que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements B_n et R_n sont indépendants.

(*a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les évènements B_n et $\overline{R_n}$ sont indépendants.

(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les évènements $\left(B_n \cap R_n, B_n \cap \overline{R_n}, M_n\right)$ forment un système complet d'évènements.

(*c*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer soigneusement que $p_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{1}{2}$.

(*d*) En déduire explicitement p_n en fonction de n.

(*e*) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.