Programme de colle n^o 15 : Limites de fonctions, début des probabilités finies.

*Semaine du lundi **20 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Limites de fonctions, chapitre complet

15.1 Se reporter au programme précédent

Espaces probabilisés finis

15.2 Expérience aléatoire, univers, événement, événements élémentaires, issues. Exemples.

15.3 Espace probabilisable fini : définition et vocabulaire.

15.4 Opérations sur les événements : vocabulaire probabiliste et opérations ensemblistes.

15.5 Système complet d'événements. Notion de réunion disjointe. Pour tout système complet d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et pour tout événement B, on a $B = \bigcup_{i=1}^{m}(B\cap A_i)$ et cette réunion est disjointe.

15.6 Probabilité sur un espace probabilisable fini. Espace probabilisé fini. Modélisation d'une expérience aléatoire : exemple.

15.7 Soient $A_1, ..., A_n$ des événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, Alors,$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

15.8 Expression de la probabilité d'un événement à l'aide des probabilités des événements élémentaires (dans le cadre d'un espace probabilisé fini)(prop. 18).

15.9 Caractérisation des probabilités sur un espace probabilisable fini à l'aide des probabilités des événements élémentaires : Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ (sans répétitions) et si $p_1, ..., p_n$ sont des éléments de $[0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

15.10 Définition de la probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini. Identification de quelques situations d'équiprobabilité.

Python

15.11 Approximation numérique (fin) : Utilisation de majorations, dans le contexte de l'étude d'une suite réelle convergente, pour approcher numériquement sa limite. Utilisation de suites adjacentes.

Quelques questions de cours

1. Définir les notions d'univers fini, d'espace probabilisable fini, d'événement, d'événement élémentaire. Illustrer ces définitions à l'aide de l'expérience aléatoire consistant à lancer dix fois de suite une pièce à Pile ou Face et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus (variante possible d'une difficulté similaire au choix de l'interrogation).
2. Définir la notion de système complet d'événements. Donner deux exemples généraux, et un système complet d'événements à 3 événements pour l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés à 6 faces et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus.
3. Dans le cadre d'un espace probabilisable fini, montrer que pour tout système complet d'événement $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ et pour tout événement B : $B = \bigsqcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$ (réunion disjointe).
4. Définir la notion de probabilité sur un espace probabilisable fini et la notion d'espace probabilisé fini. Expliquer la modélisation de l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés déséquilibrés ("poids" des faces au choix de l'interrogation) et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus.
5. Énoncer et démontrer la proposition donnant la probabilité d'une réunion (finie) d'événements deux à deux incompatibles.
6. Énoncer et démontrer la proposition (18) permettant de déterminer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide des probabilités des événements élémentaires, pour tout événement A d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
7. Énoncer la proposition (19) qui caractérise les probabilités sur un espace probabilisable fini à l'aide des événements élémentaires. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$, déterminer les réels a pour lesquels il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(\{k\}) = ak$.
8. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notion de probabilité uniforme. Déterminer la probabilité pour qu'en lançant deux dés équilibrés à 6 faces, on n'obtienne aucun 6 (après avoir modélisé le problème).
9. Montrer que les suites définies par $u_n = (\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) - \ln(n)$ et $v_n = (\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) - \ln(n+1)$ sont adjacentes. En déduire un code Python fournissant une approximation numérique à 10^{-6} près de leur limite commune γ.