

Ex1.P1.

Exercice 1.

Questions 1 à 7 : voir cours.

8a) Notons (E) l'équation $x e^{4,12\sqrt{x}} = 411$, définie sur $\mathbb{R}_+$,
et soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x e^{4,12\sqrt{x}} - 411$, de sorte que (E) : $f(x) = 0$.

f est continue sur son domaine de définition, par opérations à partir des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ toutes continues sur leur domaine.

De plus, $f(0) = -411 < 0$ et $f(411) = 411(e^{4,12\sqrt{411}} - 1) > 0$
(car $4,12\sqrt{411} > 0$). Par le théorème des valeurs
intermédiaires, f s'annule sur $[0, 411]$. Et $[0, 411] \subset \mathbb{R}_+$.
Donc (E) admet une solution sur $\mathbb{R}_+$.

b) f s'annule sur $[0, 411]$ et est continue, donc on peut procéder par dichotomie.

```
import numpy as np
```

```
def f(x):
```

```
    return (x * np.exp(4,12 * np.sqrt(x)) - 411)
```

```
a, b = 0, 411
```

```
while b - a > 10 ** (-6):
```

```
    m = (a + b) / 2
```

```
    if f(a) * f(m) < 0:
```

```
        b = m
```

```
    else:
```

```
        a = m
```

```
print((a+b)/2) # affiche l'approximation voulue.
```


Exercice 2.

1 a) Pour tous réels $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} a_k = \sum_{j=0}^n a_{2j}$$

Donc $S_n = \sum_{j=0}^n 3 \times 2^{2j-1} = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^n 2^{2j} = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^n 4^j \stackrel{(1)}{=} \frac{3}{2} \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4}$

(1): On reconnaît une somme géométrique de raison $4 \neq 1$.

Donc $S_n = \frac{4^{n+1} - 1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } T_n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} = 4 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &\stackrel{(j=k-1)}{=} 4 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \times \left(\frac{2}{3}\right)^j \\ &= 4 \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \binom{n}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} 4 \left(\left(\frac{2}{3} + 1\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \end{aligned}$$

$T_n = \frac{4}{3^n} (5^n - 2^n)$

(1): Par la formule du binôme de Newton.

2 a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ -3y = 2b - a \end{cases} \quad l_2 \leftarrow 2l_2 - l_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a - y \\ y = \frac{a - 2b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + b}{3} \\ y = \frac{a - 2b}{3} \end{cases}$$

Ex 2 P 2

Donc l'unique antécédent de (a, b) par f est $(\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3})$, et ce pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Donc f est bijective, de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(a, b) \mapsto (\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3})$

b) Déterminons $g(\mathbb{R}^3)$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a, b, c) admet un antécédent par g si et seulement si

l'équation $g(x, y, z) = (a, b, c)$ admet une solution, donc si et seulement si le système (S) ci-dessous est compatible :

$$(S) : \begin{cases} 2x + y = a \\ y - z = b \\ 2x + z = c \end{cases}$$

Or, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ y - z = b \\ -y + z = -a + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ y - z = b \\ 0 = -a + b + c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Le système échelonné (T) est compatible si et seulement si $-a + b + c = 0$.

Donc (S) est compatible si et seulement si $-a + b + c = 0$.

Donc $g(\mathbb{R}^3) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a + b + c = 0 \right\}$

Ex2 P3

c) $g(\mathbb{R}^3) \neq \mathbb{R}^3$ car par exemple, $(1, 0, 0) \notin g(\mathbb{R}^3)$,
car $-1 + 0 + 0 \neq 0$ (vu le résultat de 2b.).

Donc g n'est pas surjective.

3. a) $x \mapsto \frac{x^3 + 2^x - \frac{1}{2x}}{4x^5 + x}$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

(Remarque hors programme: $4x^5 + x = 0 \Leftrightarrow x(4x^4 + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$

(car $4x^4 + 1 \geq 1$).

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{x^3 + 2^x - \frac{1}{2x}}{4x^5 + x} = \frac{2^x \left(1 + \frac{x^3}{2^x} - \frac{1}{2x2^x} \right)}{4x^5 \left(1 + \frac{1}{4x^4} \right)}$$

Or, $2x2^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1}{4x^4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par croissance comparée :

$$\frac{x^3}{2^x} = \frac{x^3}{e^{\frac{x \ln(2)}{e}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } \ln(2) > 0 \text{ car } 2 > 1)$$

et $\frac{2^x}{x^5} = \frac{e^{x \ln(2)}}{x^5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc par opérations :

$$\frac{x^3 + 2^x - \frac{1}{2x}}{4x^5 + x} = \frac{2^x}{4x^5} \times \frac{1 + \frac{x^3}{2^x} - \frac{1}{2x2^x}}{1 + \frac{1}{4x^4}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ex 204

3b) $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}$ a pour domaine $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}} &= \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Or, par croissance comparée :

$$\frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln(x)}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, $1 + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc par composition, $\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

et sans forme indéterminée : $\frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par somme :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$x \mapsto x e^{1/x}$ a pour domaine $\mathbb{R}^*$.

c) On a $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ e^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$ (croissance comparée)

donc par composition :

$$x e^{1/x} = \frac{e}{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

De plus, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$ donc (composition) :

$$e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \text{ puis } x e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

EX2PS

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x}$.

Par théorème, $x \mapsto x e^{1/x}$ n'a pas de limite en 0.

4. On sait que
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n P(k)^2 = 0 \\ \forall k \in \{0, n\}, P(k)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul, donc :

$$\forall k \in \{0, n\}, P(k)^2 = 0.$$

D'où : $\forall k \in \{0, n\}, P(k) = 0$.

Ainsi, P admet $n+1$ racines distinctes : $0, 1, 2, \dots, n$,
et $\deg(P) \leq n$ (car $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par hypothèse).

Par théorème : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

5. Étudions les limites à droite et à gauche de f en -1 .

$$\begin{aligned} \forall x > -1, f(x) &= \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} & \begin{array}{r} x^3+1 \quad | \quad x+1 \\ 0 \quad | \quad x^2-x+1 \end{array} \\ &= \frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

On,
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2-x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{3} \\]-1, +\infty[\text{ est un voisinage de } -1^+ \end{cases}$$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{3}$.

De plus, $x+1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} 0^-$ donc $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} -\infty$.

EX2P6

Par composition, $e^{\frac{1}{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} 0$.

Enfin, $e^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} e^0 = 1$ donc par opérations :

$$\frac{1 + e^{\frac{1}{x+1}}}{2 + e^{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{3}$$

Or, $\forall x < -1$, $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x+1}}}{2 + e^{x+1}}$
 $] -\infty, -1[$ est un voisinage de -1 .

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{3}}$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{3}$.

f n'étant pas définie en -1 , $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{3}$.

Donc f est prolongeable par continuité en -1 , de
prouverement :

$$\begin{array}{l} \tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+x}{x^2+1} & \text{si } x > -1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = -1 \\ \frac{1 + e^{\frac{1}{x+1}}}{2 + e^{x+1}} & \text{si } x < -1 \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 3

$$1a) \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln(t) + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} (t \ln(t) + 1).$$

Or, par croissance comparée :

$$t \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0, \text{ donc } t \ln(t) + 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1$$

De plus, $\frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$, donc par produit :

$$\ln(t) + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} (t \ln(t) + 1) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty.$$

b)

D'après la question précédente, $\ln(t) + \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} +\infty$.

De plus, $1+x \xrightarrow[x \rightarrow -1^+]{} 0^+$ (car $\forall x > -1, 1+x > 0$).

Par composition :

$$\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \rightarrow -1^+]{} +\infty$$

$$\text{d'où } f(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1 \xrightarrow[x \rightarrow -1^+]{} +\infty.$$

f n'étant ~~pas~~ définie sur aucun voisinage à gauche de -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

De plus, $1+x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc par composition et inverse :

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty \\ \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Donc } \underline{f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty.}$$

EX3P2

On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Étudions l'existence d'une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$.

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Or, } \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car par croissance comparée, } \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc sans forme indéterminée :

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 : \text{ Si } \mathcal{C}_f \text{ a une asymptote}$$

oblique en $+\infty$, celle-ci a une pente de 0.

$$\text{Or, } f(x) - 0x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty : \mathcal{C}_f \text{ n'a pas d'asymptote oblique en } +\infty.$$

Finalement :

(i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty$ et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$

(ii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\mathcal{C}_f$ n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

EX3P3

2. $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur son domaine de définition, en tant que composée des fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \ln(x)$ dérivables; $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ l'est aussi donc f est dérivable sur son domaine $] -1, +\infty[$.

$$\text{Ainsi: } \forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\ = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Pour tout $x > -1$, $(1+x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe strict de x ; d'où le tableau de variations:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$-$	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f(0) = 0$$

3. Soit $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) + x^2$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car f et le polynôme $x \mapsto x^2$ le sont, et:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = f'(x) + 2x = \frac{x}{(1+x)^2} + 2x = x \left(\frac{1}{(1+x)^2} + 2 \right).$$

On a alors $g'(0) = 0$ et pour tout $x > 0$:

$$1+x > 1 \text{ donc } (1+x)^2 > 1 \text{ donc } \frac{1}{1+x^2} < 1$$

$$\text{D'où } x \left(\frac{1}{(1+x)^2} + 2 \right) < 0.$$

Ainsi, $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc g est

Ex 3P 4

décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq g(0) = f(0) - 0^2 = 0.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x^2 \leq 0$, d'où :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq x^2.}$$

4. Montrons par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " u_n existe et $u_n \geq 0$ ".

Initialisation : Par définition de u , $u_0 = 1 - 1 \geq 0$, donc $P(0)$ est vraie, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

Donc $u_n \in]-1, +\infty[$: $f(u_n)$ est bien défini, et donc u_{n+1} est bien défini par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, $\begin{cases} u_n \geq 0 \\ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ d'après 2} \end{cases}$

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 0$.

Ceci prouve $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

Pour conclure, On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

Donc $\underline{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ est bien définie et minorée par 0.

Ex3PS

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n \in \mathbb{R}_+$ par 4., et par 3. : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq x^2$.

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n^2$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n): "u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}"$$

Initialisation: $u_1 = f(u_0) = f(1) = \ln(2) + \frac{1}{2} - 1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

Donc $u_1 \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^1 = \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{1-1}}$.

D'où l'initialisation.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

D'après la question précédente: $u_{n+1} \leq u_n^2$. (1)

Par $P(n)$: $u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

Par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ ($u_n \geq 0$ d'après 4.):

$$u_n^2 \leq \left(\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 = \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2 \times 2^{n-1}} = \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Par transitivité avec (1):

$$u_{n+1} \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-1}}$$

D'où $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

7. Montrons $0 < \ln(2) - \frac{1}{2} < 1$. Par croissance stricte de $t \mapsto e^t$:

$$0 < \ln(2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \ln(2) \Leftrightarrow \sqrt{e} < 2 \Leftrightarrow e < 4 \quad (\text{e} \approx 2,718).$$

De plus, par équivalence:

$$\ln(2) - \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \ln(2) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < e^{3/2}.$$

EX3P6

$$\text{Or, } e^{3/2} > e^1 > 2 \quad (e \geq 2,4)$$

Donc on a bien :

$$0 < \ln(2) - \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{Donc } \ln(\ln(2) - \frac{1}{2}) < 0.$$

Donc par composition (et vu que $2^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$) :

$$\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \exp(2^{n-1} \ln(\ln(2) - \frac{1}{2})) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Alors, Clairement, $0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et d'après 4. et 6. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}.$$

Par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

8. Il suffit de trouver un entier n_0 tel que

$$\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n_0-1}} \leq 10^{-6}$$

car alors, par transitivité avec le résultat de 4., on aurait :

$$u_{n_0} \leq 10^{-6}$$

$$\text{Or: } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-6}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln\left(\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right) \leq \ln(10^{-6})$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} \ln\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) \leq -6 \ln(10)$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2^{n-1} \geq \frac{-6 \ln(10)}{\ln(\ln(2) - \frac{1}{2})}$$

EX3P7

$$(3) \quad (\Leftrightarrow) \quad (n-1) \ln(2) > \ln\left(\frac{-6 \ln(n_0)}{\ln(\ln(2) - \frac{1}{2})}\right)$$

$$(4) \quad (\Leftrightarrow) \quad n-1 > \frac{C}{\ln(2)} \quad \left(\text{où l'on pose } C = \ln\left(\frac{-6 \ln(n_0)}{\ln(\ln(2) - \frac{1}{2})}\right) \right)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad n > \frac{C}{\ln(2)} + 1$$

(1), (2) et (3): Par croissance stricte de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et
 car :

$$(1): \quad \ln(2) - \frac{1}{2} > 0 \quad (q.f.) \quad \text{donc} \quad \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} > 0$$

$$(2) \quad \ln(\ln(2) - \frac{1}{2}) < 0 \quad \text{car} \quad \ln(2) - \frac{1}{2} < 1 \quad (q.f.)$$

$$(3): \quad \begin{aligned} -6 \ln(n_0) < 0 & \quad \text{donc} \quad \frac{-6 \ln(n_0)}{\ln(\ln(2) - \frac{1}{2})} > 0 \\ \ln(\ln(2) - \frac{1}{2}) < 0 \end{aligned}$$

$$(4): \quad \text{car } \ln(2) > 0.$$

Ainsi, on pose $n_0 = \left\lceil \left| \frac{C}{\ln(2)} + 1 \right| \right\rceil + 1$

$$\text{On a } n_0 > \left| \frac{C}{\ln(2)} + 1 \right| \geq \frac{C}{\ln(2)} + 1 \quad \text{et } n_0 \geq 0, \quad \text{d'après (5).}$$

donc par l'équivalence précédente,

$$\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n_0-1}} \leq 10^{-6}$$

$$\text{puis : } u_{n_0} \leq 10^{-6}.$$

$$\text{L'entier } n_0 = \left\lceil \left| \frac{1}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{-6 \ln(n_0)}{\ln(\ln(2) - \frac{1}{2})}\right) + 1 \right| \right\rceil + 1$$

$$\text{vérifie } u_{n_0} \leq 10^{-6}.$$

Ex3p8

9. import numpy as np

def f(x):

return (np.log(1+x) - 1/(1+x) - 1)

n = 0

u = 1

while u > 10 ** (-6):

n += 1

u = f(u)

print(n)

Ex 4P.1

1. Soit $a > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - a = 0, \text{ où l'on a posé } t = \sqrt{x}.$$

$t^2 - t - a$ est un polynôme de discriminant $\Delta = 1 + 4a > 1$ (car $a > 0$)
donc $\Delta > 0$ et ses racines sont:

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \text{ et } t_2 = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}_+, f_a(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = t_1 \text{ ou } \sqrt{x} = t_2.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = t_1$$

$$(2) \Leftrightarrow x = t_1^2, \text{ et } t_1^2 \in \mathbb{R}_+.$$

$$(1): t_2 < 0 \text{ car } \sqrt{1+4a} > \sqrt{1} = 1, \text{ car } 4a > 0.$$

$$(2): t_1 > 0 \text{ car } \begin{cases} 1 > 0 \\ \sqrt{1+4a} > 0 \end{cases} \text{ et } 2 > 0.$$

L'unique solution de $f_a(x) = 0$ est $h(a) = \left(\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \right)^2$,
pour tout $a > 0$.

2. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire
des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\sqrt{x} - 1 > 0 \\ (2\sqrt{x} > 0) \end{matrix} \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4},$$

et f_a' s'annule en $\frac{1}{4}$, d'où les variations:

x	0	1/4	+
$f_a'(x)$	-	0	+
f_a	-a	-a - 1/4	

(Rq: Avec les outils
actuels, il faut exclure
0 de la conclusion: voir (Continuité))

EX4P2

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

et $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

donc si la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote en $+\infty$,
alors celle-ci admet une équation de la forme $y = x + b$ ($b \in \mathbb{R}$)

Or, $f(x) - x = -\sqrt{x} - a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

Donc la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$

4. $l: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $a \mapsto \left(\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \right)^2$ est croissante en tant que
composition de fonctions croissantes. En effet,

$\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante (affine de pente $\frac{1}{2}$)
 $a \mapsto 1+4a$

dans par croissance de $A \mapsto A^2$:

$\beta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante
 $a \mapsto \sqrt{1+4a}$

De plus, $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante (affine de pente $\frac{1}{2}$)
 $t \mapsto \frac{1+t}{2}$

Par composition, $\gamma \circ \beta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croît.
 $a \mapsto 1 + \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

Enfin, par croissance de $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (et composition):
 $t \mapsto t^2$

$l = \delta \circ \gamma \circ \beta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $a \mapsto \left(\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \right)^2$ est croissante

P.S. : Vous pouvez aussi dériver!

EX4P3

5. Procédons par récurrence.

Montrons par récurrence: $\forall n \geq 2, P(n): "u_n > 1"$

Init: $u_2 = \sqrt{u_1} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{u_1} > 1$ car $u_1 > 0$.
D'où l'initialisation.

Hérédité: Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, $u_n > 1$. Donc $\sqrt{u_n} > \sqrt{1} = 1$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

D'où $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence: $\forall n \geq 2, u_n > 1$.

6. Supposons que $(u_n)_n$ converge et posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a (q°5): $\forall n \geq 2, u_n > 1$.

Par passage à la limite des inégalités: $l \geq 1$

En particulier, $l \in \mathbb{R}_+$ donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en l .

Alors par composition: $\sqrt{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{l}$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{l} + 0 = \sqrt{l}$$

$$\text{Or, } u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad (\text{car } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l)$$

Par unicité de la limite:

$$l = \sqrt{l}.$$

On a montré $l \geq 1$, donc:

$$l = \sqrt{l} \Leftrightarrow \sqrt{l}(l-1) = 0 \Leftrightarrow l-1 = 0 \Leftrightarrow l = 1.$$

Si $(u_n)_n$ converge, alors sa limite est 1.

EX4P4

7a) $f(x) = \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right)^2$.

De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\forall n \geq 1, f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(1).$$

D'après (P) : $\forall n \geq 1, u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(1) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

b) Soit $n \geq 1$.

$$u_{n+1} - u_n = -u_n + f\left(\frac{1}{n}\right) = -f_{\frac{1}{n}}(u_n).$$

Or, $f_{\frac{1}{n}}$ est négative sur $[0, \frac{1}{4}]$ car elle est décroissante et $f(0) = -a < 0$.

De plus, $f_{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$ et $f_{\frac{1}{n}}(f(\frac{1}{n})) = 0$ donc $\forall x \in [\frac{1}{4}, f(\frac{1}{n})], f_{\frac{1}{n}}(x) \leq 0$.

Finalement, $f_{\frac{1}{n}}$ est négative sur $[0, f(\frac{1}{n})]$.

On a supposé $u_n \leq f(\frac{1}{n})$, donc $f_{\frac{1}{n}}(u_n) \leq 0$.

D'après l'égalité précédente, $u_{n+1} \geq u_n$ et ce pour tout $n \geq 1$.

$(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

EX4PS

8. D'après les questions 7a. et b., si (P) est vraie, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge. Par croissance, sa limite vérifierait $u_2 - 1 + \frac{1}{u_1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Mais on a montré question 6 que (dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

On aurait donc $1 + \frac{1}{u_1} < 1$, ce qui est absurde ($u_1 > 0$).

Ceci démontre, par l'absurde, que (P) est fausse.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie donc non (P):

$$\exists n \geq 1, u_n \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

9. Fixons un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 1 + \frac{1}{n_0}$, dont l'existence est assurée par la question précédente.

Montrons par récurrence:

$$\forall n \geq n_0, P(n): u_{n+1} \leq u_n.$$

Initialisation: Montrons $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.

$$u_{n_0+1} - u_{n_0} = -f_{\frac{1}{n_0}}(u_{n_0}). \text{ Or, } u_{n_0} \geq 1 + \frac{1}{n_0} \text{ et}$$

$$f_{\frac{1}{n_0}} \text{ est croissante sur } \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[\quad (q^{-2})$$

$$1 + \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{2^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\text{donc } f_{\frac{1}{n_0}}(u_{n_0}) \geq f_{\frac{1}{n_0}}\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) = 0$$

Donc $u_{n_0+1} - u_{n_0} = -f_{\frac{1}{n_0}}(u_{n_0}) \leq 0 : u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$, d'où l'initialisation.

EX4P6

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^p$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\text{Par } P(n), \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\text{Donc } \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}, \text{ donc par somme:}$$

$$\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$

d'où $P(n+1)$: $u_{n+2} \leq u_{n+1}$,
d'où l'hérédité.

On a donc montré par récurrence: $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$.
 $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante

10. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, minorée (q°5) donc
converge, par le théorème de la limite monotone.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (la convergence ne dépend pas des
premiers termes).

Par la question 6:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

Ex 5 P1.

1. Pour construire une partie en deux manches, par choix successifs :

* On choisit les deux symboles joués par Alice. Il y a 3 symboles, donc 3^2 possibilités pour les choix d'Alice.

* On choisit les deux symboles joués par Bob. Il y a de même 3^2 possibilités.

Par choix successifs, il y a donc $3^2 \times 3^2 = \underline{81}$ parties possibles en deux manches.

2. Pour construire une partie où Alice gagne exactement une manche, on procède par choix successifs :

* On choisit les symboles joués par Alice : 9 possibilités.

* On choisit la manche gagnée par Alice : 2 possibilités.

* On choisit les symboles joués par Bob : le symbole joué sur la manche gagnée par Alice est fixé (Bob doit perdre), et il reste deux possibilités pour l'autre manche (Bob ne doit pas perdre). Donc il y a 2 choix possibles.

Par choix successifs, il y a $9 \times 2 \times 2 = \underline{36}$ parties où Alice gagne exactement une manche.

3. On peut procéder par cas disjoints :

* on compte les parties où Bob gagne les deux manches.

Par choix successifs, il y a 9 choix pour les symboles joués par Bob puis 1 choix pour ceux joués par Alice (elle doit perdre les deux). Donc 9 telles parties.

EXSP2

* On compte les parties où Bob gagne la 1^{re} manche et fait nul à la seconde. Il y a 9 choix possibles pour les symboles de Bob, et une fois ceux-ci choisis, il ne reste qu'un choix pour ceux d'Alice. Donc il y a 9 telles parties.

* De même, il y a 9 parties pour lesquelles Bob gagne la 2^e manche et fait nul à la première.

Ces cas sont bien disjoints et exhaustifs (si Bob gagne une partie, il gagne 1 ou 2 manches) donc :

il y a $9+9+9=27$ parties gagnées par Bob.

4. Pour construire une telle partie, on choisit les symboles d'Alice (9 possibilités) et les symboles de Bob sont alors déterminés par le fait qu'il perd tous ses matchs. Il y a donc 9 parties où Alice gagne toutes les manches.

5. On procède par choix successifs, pour construire une partie :

* Il y a 3^N possibilités pour les symboles joués par Alice, car $\text{Card}(\{P, F, C\}^N) = \dots = \text{Card}(\{P, F, C\})^N = 3^N$.

* Il y a, de même, 3^N choix possible pour les symboles joués par Bob.

Par principe multiplicatif, il y a donc $3^{2N} = 9^N$ parties en N manches.

6. Pour construire une partie dont toutes les manches sont nulles, on choisit les N symboles joués par Alice (3^N possibilités) et les symboles joués par Bob sont alors déterminés, pour

EX SP3

que chaque manche soit nulle.

Il y a donc 3^N parties n'ayant que des manches nulles.

7. a) On construit par choix successifs les parties où Bob ne gagne aucune manche.

* On choisit les symboles joués par Alice (3^N possibilités), puis

* On choisit les N symboles joués par Bob.

Ne devant gagner aucune manche, on ne dispose que de deux choix de symboles par manche (pour que Bob perde ou fasse nul face au symbole choisi pour Alice). Il y a donc 2^N possibilités.

Par choix successifs, il y a $3^N 2^N = 6^N$ parties où Bob ne gagne aucune manche.

7 b) Il y a 6^N parties où Bob ne gagne aucune manche
} 9^N parties au total

donc par passage au complémentaire :

Il y a $9^N - 6^N = 3^N(3^N - 2^N)$ parties où Bob gagne au moins une manche.

8 a) Pour construire une telle partie :

* On choisit les symboles d'Alice (3^N possibilités),

* On choisit les k manches gagnées par Bob. Il y a N manches, donc $\binom{N}{k}$ possibilités.

* Les symboles de Bob sont alors fixés sur les

EX SP4

Le mancher qu'il gagne : il reste $N-k$ symboles à choisir pour finir de déterminer ceux de Bob. Ces symboles ne doivent pas gagner face à ceux fixés par Alice, et il y a donc 2^{N-k} possibilités.

Par choix successifs, il y a donc $\underline{3^N \binom{N}{k} 2^{N-k}}$ parties pour lesquelles Bob gagne exactement k manches.

b) Pour compter les parties où Bob gagne au moins une manche, on peut procéder par cas disjoints.

Par là il y a $3^N \binom{N}{k} 2^{N-k}$ parties où Bob gagne exactement k manches, et ce pour tout $k \in \{1, N\}$. Ces cas sont disjoints, donc le nombre de parties où Bob gagne entre 1 et N manches est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N 3^N \binom{N}{k} 2^{N-k} &= 3^N \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} 2^{N-k} \\ &= 3^N \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 2^{N-k} - \binom{N}{0} 2^{N-0} \right) \\ &= 3^N \left((2+1)^N - 2^N \right) \quad (\text{Binôme de Newton}) \\ &= 3^N (3^N - 2^N). \end{aligned}$$

On retrouve qu'il y a $\underline{3^N (3^N - 2^N)}$ parties où Bob gagne au moins une manche.

Ex SPS.

9. Pour construire une telle partie, par choix successif.

- * On choisit les symboles d'Alice. il y a 3^n possibilités.
- * On choisit les u manches gagnées par Alice. Il y a N manches au total, donc $\binom{N}{u}$ choix possible.
- * On choisit les v manches nulles parmi celles non gagnées par Alice. Il reste $N-u$ manches possibles pour ces choix, donc $\binom{N-u}{v}$ possibilités pour choisir les manches nulles.
- * Alan, toutes les manches restantes doivent être gagnées par Bob. L'issue des manches étant fixée et les symboles d'Alice aussi, les symboles de Bob sont déterminés entièrement.

Finalement, il y a bien $3^n \binom{N}{u} \binom{N-u}{v}$ parties où Alice gagne exactement u manches et cluse exactement v manches nulles.

10 a) Soit $k \in \{0, n\}$.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} &= \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} \times \frac{(2n-k)!}{k! (2n-2k)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(k!)^2 (2n-2k)!} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{(2n)!}{(2k)! (2n-2k)!} \\ &= \binom{2k}{k} \times \binom{2n}{2k} \end{aligned}$$

EXSPB

$$\text{D'où } \forall k \in \{0, n\}, \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} = \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k}$$

b)

Comptons d'abord le nombre de parties nulles où Alice a gagné un nombre k fixé de manches.

Pour qu'une telle partie puisse être nulle, il faut que le nombre k de manches gagnés par Alice vérifie $k \leq \frac{n}{2}$, afin que Bob puisse aussi gagner k manches.

Soit $k \in \{0, n\}$.

Pour construire une partie nulle où Alice et Bob gagnent tous deux exactement k manches, procétons successivement :

- * On choisit les n symboles d'Alice (3^n possibilités)
- * On choisit les k manches gagnées par Alice ($\binom{n}{k}$ possibilités)
- * On choisit les k manches gagnées par Bob parmi les $n-k$ restantes : $\binom{n-k}{k}$ possibilités.

* Alors, les issues de toutes les manches sont fixées (les manches non choisies avant sont nulles), donc les symboles de Bob sont fixés.

Ainsi, il y a $3^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = 3^{2n} \binom{2n}{2k} \binom{2n-k}{k}$ parties

nulles où Alice et Bob gagnent exactement k manches, pour tout $k \in \{0, n\}$.

Par ces raisonnements, on a $M_n = 3^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2n-k}{k}$.

Ex SP 7

Avec la question précédente, on a donc :

$$M_n = 3^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k}$$

11. Soit Ω l'ensemble des parties, A (resp. B) l'ensemble des parties gagnées par Alice (resp. Bob) et M l'ensemble des parties nulles.

On a la réunion disjointe :

$$\Omega = A \cup B \cup M$$

$$\text{Donc } \text{Card}(\Omega) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(M)$$

Par symétrie des rôles d'Alice et Bob : $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$

$$\text{Donc } 2 \text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(M)$$

$$\text{D'où } \text{Card}(A) = \frac{3^{2n} - M_n}{2} \quad (\text{Card}(\Omega) = 3^{2n} = 3^{4n})$$

$$\text{Il y a donc } \frac{3^{2n} (3^{2n} - S_n)}{2} \text{ parties gagnées par}$$

Alice.

Ex SP8.

12. def fact(n):

 p = 1

 for k in range(1, n+1):

 p = p * k

 return(p)

def binom(n, k):

 return(fact(n) / (fact(k) * fact(n-k)))

13. def S(n):

 sum = 0

 for k in range(n+1):

 sum += binom(2*k, k) * binom(2+n, 2+k)

 return(sum)

14. L = []

for k in range(101):

 if S(k) == binom(4+k, 2+k):

 L.append(k)

print(L)

15. n = 1

while $S(n) / (3^{2n} (2+n)) > 10^{-4} (1-2)^{-2}$

 n += 1

print(2*n) # affiche le nombre 2n de parties réversibles.

En effet, cette probabilité est $\frac{M_n}{T_n} = \frac{3^{2n}}{3^{4n}} S(n) = \frac{S(n)}{3^{2n}}$.

Ex 6p1 Exercice 6

1. On s'en sort avec un théorème des gendarmes.
2. Chercher une suite d'rationnels $(u_n)_n$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

S'en servir dans un raisonnement par l'absurde.

3. Appliquer la stratégie précédente :

* pouvez-vous justifier l'existence d'une suite de rationnels tendant vers x_0 ? / Idée peu formalisée (suffisante ici). Au pire :

* Admettons que vous avez $(u_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Savez-vous conclure?