Devoir surveillé numéro 4

Devoir du 18/01/2025.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 Cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$.
2. (a) Énoncer la proposition donnant la forme factorisée d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines deux à deux distinctes.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que tout polynôme de degré au plus n admettant (au moins) $n + 1$ racines est le polynôme nul.
3. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ deux applications.
(a) A quelle condition la composée $f \circ g$ est-elle bien définie ?
(b) On suppose la condition de la question précédente vérifiée, et f et g injectives. Que dire de $f \circ g$? Le démontrer.
4. Énoncer le théorème de la limite monotone, dans le contexte des suites réelles.
5. Soit E un ensemble fini. Énoncer et démontrer la proposition donnant $\text{Card}(\bar{A})$ en fonction de $\text{Card}(A)$ pour toute partie A de E .
6. Énoncer la formule du binôme de Newton.
7. Énoncer le théorème de passage à la limite des inégalités, dans le contexte des fonctions réelles.
8. (a) Justifier que l'équation $xe^{412\sqrt{x}} = 411$ admet (au moins) une solution sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Écrire un code Python permettant de calculer une approximation à 10^{-6} près d'une solution de cette équation (méthode au choix). On justifiera ce qui est nécessaire au bon déroulement de la méthode.

Exercice 2 *Quelques méthodes classiques*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$(a) S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} 3 \times 2^{k-1}.$$

$$(b) T_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}.$$

2. (a) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$ est-elle bijective? Si oui, donner une expression de sa réciproque.

(b) Déterminer l'ensemble image de $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2x + y, y - z, 2x + z) \end{cases}$.

(c) g Est-elle surjective ?

3. Étudier l'existence et l'éventuelle valeur des limites (de fonctions réelles) suivantes. On donnera sans justification le domaine de définition des fonctions qui interviennent.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2^x - \frac{1}{2x}}{4x^5 + x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sqrt{x}}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\sum_{k=0}^n P(k)^2 = 0$. Que dire de P ?

5. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x^3+1} & \text{si } x > -1 \\ \frac{1+e^{\frac{1}{x+1}}}{2+e^{x+1}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en -1 , et expliciter ce prolongement.

Exercice 3

Considérons la fonction $f : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1 \end{cases}$.

1. (a) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) + \frac{1}{t}$.

(b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptotes de sa courbe.

2. Dresser le tableau de variation complet de f sur $] -1, +\infty[$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq x^2$.

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Montrer que : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 0.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n^2$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

7. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

8. Déterminer explicitement un entier n_0 tel que $u_{n_0} \leq 10^{-6}$.

9. Écrire un code Python affichant le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-6}$.

Exercice 4

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}.$$

Pour tout réel $a > 0$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a.$$

1. Montrer que, pour tout $a > 0$, l'équation $f_a(x) = 0$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$) admet une unique solution, que l'on notera $\ell(a)$, et donner une expression de $\ell(a)$.
2. Étudier les variations de f_a .
3. Étudier l'existence d'une asymptote à la courbe de f_a en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction $\ell : a \mapsto \ell(a)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Démontrer que $\forall n \geq 2, u_n > 1$.
6. Dans cette question uniquement, on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Déterminer sa limite.
7. Dans ces sous-questions, on suppose la propriété (P) suivante vraie :

$$(P) : \forall n \geq 1, u_n \leq \ell\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (a) Que vaut $\ell(1)$? En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
 - (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.
8. Montrer par l'absurde que la propriété (P) est fausse. Quelle propriété la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie-t-elle?
 9. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang n_0 .
 10. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 5 *Shifumi*

Alice et Bob jouent au Pierre-feuille-ciseaux.

- Lors de chaque **manche**, Alice et Bob choisissent secrètement l'une des trois possibilités en disant simultanément "Shi-Fu-Mi" et révèlent leur choix sur le "Mi". Chaque manche peut donner lieu à un vainqueur (selon les règles que vous devriez connaître) ou à un match nul.
- Une **partie** est constituée de plusieurs manches. À l'issue de la partie, le joueur ayant gagné le plus de manches est déclaré gagnant, et il peut y avoir partie nulle.

Attention, dans les questions de cet exercice, une partie est décrite par la suite des choix de chaque joueur (et non pas par la suite des résultats des manches).

Section I : Partie en 2 manches

Dans cette section de l'exercice, Alice et Bob jouent une partie en 2 manches.

1. De combien de manières peut se dérouler la partie ?
2. Quel est le nombre de parties pour lesquelles Alice gagne exactement une manche ?
3. Quel est le nombre de parties pour lesquelles Bob gagne la partie ?
4. Quel est le nombre de parties pour lesquelles Alice gagne toutes les manches ?

Section II : Généralisation

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Alice et Bob font maintenant une partie en N manches.

5. Déterminer le nombre total de parties possibles.
6. Montrer qu'il y a 3^N parties pour lesquelles toutes les manches sont nulles.
7. (a) Quel est le nombre de parties pour lesquelles Bob ne gagne aucune manche ?
(b) En déduire le nombre de parties pour lesquelles Bob gagne au moins une manche.
8. (a) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Déterminer le nombre de parties pour lesquelles Bob gagne exactement k manches.
(b) À l'aide de ce résultat, retrouver le résultat de la question 7b).
9. Soient u et v des entiers naturels tels que $u + v \leq N$. Montrer que le nombre de parties pour lesquelles Alice gagne exactement u manches et ayant exactement v manches nulles est $3^N \binom{N}{u} \binom{N-u}{v}$.
10. À partir de maintenant et pour toutes les questions suivantes, on suppose le nombre N de manches pair et on note n l'unique entier tel que $N = 2n$.

(a) Montrer : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} = \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k}$.

(b) Montrer que le nombre M_n de parties nulles est $M_n = 3^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k}$.

Dans la suite du sujet, on note $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k}$.

11. Quel est le nombre de parties menant à une victoire d'Alice ? On pourra donner la réponse en fonction de S_n .

Section III : Bataille avec un LLM

Lors de la conception de ce sujet, le concepteur se demande s'il existe une identité pour simplifier la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k} \text{ qu'il ne connaîtrait pas.}$$

À cours d'idées, il a demandé à une certaine IA générative si une telle identité existe, qui lui propose l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n}{2k} = \binom{4n}{2n}.$$

Perplexe, il demande une argumentation. Face aux arguments douteux (mais insistants!) fournis par l'IA, des vérifications sont à entreprendre.

- Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def binom(n,k)` : prenant en entrée deux entiers naturels `n` et `k` tels que $0 \leq k \leq n$ et renvoyant en sortie $\binom{n}{k}$. *Utilisation de la fonction `math.factorial` du module `math` interdite.*
- En déduire le code d'une fonction Python d'entête `def S(n)` : prenant en entrée l'entier `n` et renvoyant S_n .
- Écrire un code Python affichant la liste des entiers inférieurs à 100 pour lesquels l'identité proposée par l'IA est vraie.
*Cette identité n'est vraie que pour $n = 0 \dots$ Merci Ch***PT.*
- On admet que la probabilité d'avoir une partie nulle est $\frac{M_n}{T_n}$, où T_n est le nombre total de parties possibles en $2n$ manches (et M_n est toujours le nombre de parties nulles en $2n$ manches).
Écrire un code Python permettant de connaître le nombre minimal $N = 2n$ de manches nécessaire pour que la probabilité d'avoir une partie nulle soit inférieure à 1%.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que f est continue en 0.
- Soit $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Montrer que f n'est pas continue en x_0 .
- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. f est-elle continue en x_0 ? En déduire l'ensemble des points de continuité de f .

— Fin de l'énoncé —