Programme de colle n^o 16 : Probabilités sur un univers fini.

*Semaine du lundi **27 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Espaces probabilisés finis (suite)

16.1 Propriétés des probabilités : probabilité de l'événement contraire, de l'événement impossible, croissance pour l'inclusion, probabilité d'une réunion de 2 événements, de 3 événements (formule du Crible). Formule des probabilités totales sans conditionnement.

Probabilités conditionnelles

16.2 Probabilités conditionnelles : définition. Pour tout événement A d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Conséquence : la liste des propriétés vérifiées par toute probabilité est vérifiée par $\mathbb{P}_A$. Interprétation d'hypothèses sous forme de probabilités conditionnelles (exemples).

16.3 Formule des probabilités composées au rang 2, puis de rang quelconque.

16.4 Formule des probabilités totales avec conditionnement. Cas particulier d'un SCE $(A, \bar{A})$ tel que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$.

16.5 Formules de Bayes.

Indépendance

16.6 Indépendance de deux événements pour une probabilité donnée. Caractérisation de l'indépendance à l'aide de probabilités conditionnelles. Stabilité de la notion d'indépendance par passage au complémentaire.

16.7 Indépendance mutuelle et indépendance deux à deux d'une famille d'événements. Stabilité par passage au complémentaire (admise). L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse : exemple.

Python

16.8 Algorithmes glouton : principe général sur des problèmes de choix successifs, problème du rendu de monnaie, système monétaire canonique ou non.

Quelques questions de cours

1. Énoncer la proposition donnant les propriétés vérifiées par toute probabilité sur un espace probabilisable fini (prop. 26). En démontrer quelques-unes, au choix de l'interrogation.
2. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales, avec et sans conditionnement.
3. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées (cas général, en montrant d'abord la formule au rang 2).
4. Montrer que si A est un événement d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
5. Énoncer et démontrer les formules de Bayes. Une urne contient deux dés. L'un est équilibré, l'autre n'a que des faces 6. On pioche un dé au hasard, que l'on lance, et on note la face obtenue. Réalisant cette expérience, on obtient un 6. Quelle est la probabilité d'avoir pioché le dé équilibré?
6. Définir la notion d'indépendance de deux événements, et énoncer la caractérisation utilisant les probabilités conditionnelles. Montrer que si A et B sont des événements indépendants d'un espace probabilisé fini, alors A et $\bar{B}$ le sont.
7. Définir les notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle pour une famille d'événements d'un espace probabilisé fini. Donner une expérience aléatoire et trois événements deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants (preuve comprise).
8. Expliquer (oralement) la notion d'algorithme glouton sur l'exemple du problème de rendu de monnaie, et donner le code d'une fonction Python qui réalise la stratégie gloutonne pour proposer un rendu de monnaie pour une somme `S` et un système monétaire `V`.