Programme de colle n^o 2 : Fonctions réelles de la variable réelle.

*Semaine du lundi **25 septembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Fin du chapitre précédent

2.1 Raisonnement par récurrence, par récurrence sur deux rangs, par récurrence forte.

On sera exigeant avec les détails de la rédaction. La récurrence forte est à la limite du programme : on indiquera au élèves la nécessité de faire une récurrence forte dans les énoncés le cas échéant.

Fonctions réelles de la variable réelle.

2.2 Notion de fonction réelle. Domaine de définition, image et antécédent. Fonction constante. Recherche du domaine de définition d'une fonction donnée par une formule. Graphe d'une fonction.

2.3 Fonction définie *en* un point, *sur* une partie de $\mathbb{R}$.

$f : D \to \mathbb{R}$ est dite définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ si $I \subset D$.

2.4 Fonction monotone et strictement monotone sur une partie $I \subset \mathbb{R}$. Toute fonction strictement monotone est monotone. Si f est croissante (idem décroissante) sur I, alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) < f(y) \implies x < y.$$

Si f est strictement croissante sur I (et idem strictement décroissante), alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, f(x) < f(y) \iff x < y$$

et l'énoncé similaire avec inégalités larges est vrai. Utilisation pour la résolution d'équation. Définition de la notion de fonction injective pour les fonctions réelles. Toute fonction strictement monotone est injective, utilisation dans la résolution d'équations.

Aucun exercice portant sur l'injectivité n'a été vu, mais on pourra tester la compréhension de cette définition avec des questions simples.

2.5 Partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine. Notion de fonction paire, de fonction impaire. Propriétés de symétrie du graphe d'une fonction paire ou impaire.

2.6 Notion de fonction minorée, majorée et bornée. Notion de minorant, de majorant. Une fonction f est bornée sur I si et seulement si :

$$\exists M \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

Notion de maximum, de minimum ou d'extremum d'une fonction sur une partie $I \subset \mathbb{R}$. Tout maximum/minimum est un majorant/minorant, mais la réciproque est fausse.

Aucun théorème sur les extrema locaux n'a été vu. Dire qu'un réel est le *majorant/minorant d'une fonction sera sanctionné.*

2.7 Opérations sur les fonctions réelles : somme, produit, quotient de fonctions, et multiplication scalaire d'une fonction par un réel. Composition de fonctions. Recherche du domaine de définition d'une composée.

Quelques questions de cours

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2 - 1} \leq x - 1$.
2. Soient n et m deux entiers. Montrer que n et m sont de même parité si et seulement si $n^2 + m^2$ est pair.
3. Montrer que $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$.
4. Énoncer et démontrer la proposition 4 pour les fonctions strictement croissantes, permettant d'appliquer une fonction strictement croissante lors de la résolution d'une inéquation (stricte ou large). L'interrogateur est libre de demander la démonstration détaillée de toute affirmation. *Vous devez donc connaitre et savoir démontrer les propositions sur lesquelles cette preuve s'appuie.*
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Démontrer l'existence d'uniques fonctions définies sur $\mathbb{R}$, f_P et f_I, respectivement paire et impaire, et telles que $f = f_P + f_I$.
6. La fonction exponentielle est-elle majorée, minorée? Le démontrer. Admet-elle un maximum, un minimum? Le démontrer.
7. Soient f et g les fonctions réelles définies par $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$ et $g(x) = \ln(x)$. Donner le domaine de définition de la composée $g \circ f$ de f par g.
8. Écrire au tableau un code `Python` permettant de calculer $1 + 3 + 5 + \ldots + 237$. Puis, écrire un code permettant, étant donné un entier `n` donné en début de code, affiche *"L'entier est pair"* si `n` est pair, et affiche son double sinon.