Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°12 : Calcul matriciel

2024-2025
Mathématiques

Pour commencer

Opérations matricielles

Exercice 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer, si possible, $A+B, AB, BA, AC, BC$ et ABC.

Exercice 2 On considère les matrices $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer LC, CL, LCL et CLC.

Exercice 3 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer A comme une combinaison linéaire de I et J.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $AX = XA$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent à $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Combien existe-t-il de matrices diagonales $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $D^2 - D - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

(*a*) Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non-nulle et antisymétrique.

(*b*) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique est nulle.

(*c*) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois diagonale et antisymétrique est nulle.

(*d*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe un unique couple de matrices $(S, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $\begin{cases} {}^tS = S \\ {}^tA = -A \\ M = S + A \end{cases}$

Déterminer les matrices S et A lorsque $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

(*a*) Calculer $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

(*b*) Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(*c*) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si P est inversible alors :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP).$$

(*d*) Existe-t-il une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$?

Puissances de matrices

Exercice 9 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On pourra commencer par calculer $A^2, A^3, A^4, \ldots$ jusqu'à être en mesure de conjecturer un résultat que l'on prouvera ensuite par récurrence.

Exercice 10 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \mathrm{I}_2 + B$.

Déterminer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = (a-b)\mathrm{I}_2 + bJ$.

(b) Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $P, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} P + Q & = \mathrm{I}_2 \\ P + \frac{1}{3}Q & = \quad M \end{cases}$

(b) Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.

(c) En déduire P^k et Q^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire l'expression explicite de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}, puis calculer PDP^{-1}.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = -I_3 + J$.

(b) Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) À l'aide de la formule du binôme, en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et en déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) On pose $B = I_3 + A$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, B^n = I_3 + \frac{5^n - 1}{4}A$.

Exercice 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + b\mathrm{I}_3$.

(b) Calculer alors A^3, A^4 et A^5 en fonction de A et I_3.

(c) En déduire une conjecture donnant l'expression de A^n en fonction de A et I_3 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 18 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et A^3, puis exprimer A^3 en fonction de A et A^2.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A^n = a_n A + b_n A^2$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont les suites réelles définies par $a_1 = 1, b_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

(c) Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire b_n, puis a_n en fonction de n. Déterminer alors A^n explicitement en fonction de n.

Matrices inversibles

Exercice 19 Calculer, si possibles, les inverses des matrices :

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $E = \begin{pmatrix} 2 & \ln 4 \\ 1 & \ln 2 \end{pmatrix}$ (e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (g) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (f) $D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{12} \end{pmatrix}$ (h) $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 20 Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui déterminer leurs inverses :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 21 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 22 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et A^3, puis exprimer A^3 en fonction de A et A^2.

(b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 23 Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Lorsque A est inversible, calculer A^{-1}.

Pour continuer

Opérations matricielles

Exercice 24 Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A+B, A^2, B^2, AB$ et BA. En déduire $(A+B)^2$ de deux manières différentes.

Exercice 25 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B, A-2B, AB, BA, A^2$ et B^2.

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer tous les produits possibles avec les matrices A, B, C et D.

Exercice 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 28 Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent à $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Puissances de matrices

Exercice 29 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer les puissances de M.

(a) Trouver $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M = \lambda \mathrm{I}_2 + A$ et $a = 1$.

(b) Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 On souhaite calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire A sous la forme $I_3 + N$ avec une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ bien choisie.

(b) Déterminer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme, en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = -\mathrm{I}_3 + N$.

(b) Déterminer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 33 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra distinguer des cas).

Exercice 34 Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $6A^3 = 11A^2 - 5A$.

(b) En déduire qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A^2 + b_n A$ et exprimer a_{n+1}, puis b_{n+1}, en fonction de a_n et b_n.

(*c*) En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis une expression explicite de a_n en fonction de n.

(*d*) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Matrices inversibles

Exercice 35 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 36 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses :

(*a*) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (*b*) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (*c*) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 37 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et en déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 38 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ 1-a & a-1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Lorsque A est inversible, calculer A^{-1}.

Exercice 39 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

(*a*) Montrer que: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.

(*b*) Déterminer l'ensemble: $E = \{a \in \mathbb{R}, M(a) \text{ est inversible } \}$.

(*c*) Pour tout $a \in E$, déterminer explicitement $M(a)^{-1}$.