

TP de Python numéro 8 : Matrices et le type array de numpy

Semaine du 13 février.

Pensez, lors des exercices, à bien vérifier vos fonctions sur des exemples variés !

Dans tous les énoncés et exemples de ce TP, on suppose numpy importé via la commande :

```
import numpy as np
```

I. Définition de matrices avec numpy

1. Modélisation informatique des matrices

Pour modéliser une matrice en informatique, on dit qu'une matrice est représentée par la liste de ses lignes, elles-mêmes représentées comme des listes.

Par exemple, **en première approche** (ceci sera immédiatement changé), la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est donnée par la liste :

```
A=[ [1, 2], [3, 4] ]
```

Le problème si on s'arrêtait ici, c'est que les opérations dont on dispose sur les listes ne correspondent pas du tout à celles sur les matrices. Par exemple, la somme de deux listes est leur concaténation :

```
>>> A=[ [1, 2], [3, 4] ]
>>> B=[ [0, 0], [1, 1] ]
>>> A+B
[[1, 2], [3, 4], [0, 0], [1, 1]]
```

La somme $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas du tout $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Afin de représenter les matrices avec Python en ayant accès aux opérations matricielles et à d'autres outils pratiques, on utilisera le type `array` de `numpy`, qui vient avec une multitude d'outils que nous allons explorer.

On rappelle que dans ce TP, `numpy` est importé avec l'alias `np`.

Le type `array` de numpy

- Le type `array` de `numpy` est désigné en Python par :
`numpy.ndarray`
(*nd stands for : "n-dimensionnal".*)
- Soit L une liste de liste représentant une matrice au sens précédent. Alors, la commande
`A=np.array(L)`
créer une nouvelle variable A contenant l'objet de type `numpy.ndarray` donné par la liste L .

Exemple 1.

```
>>> import numpy as np
>>> L=[ [1, 2], [3, 4] ]
>>> A=np.array(L)

>>> A
array([[1, 2],
       [3, 4]])

>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
```

Pour définir une matrice en Python, on peut donc entrer ses coefficients ligne par ligne dans une liste de liste, puis transformer cette liste de liste en objet de type `array` avec la commande `np.array`.

Remarque. Pour que `np.array` ait l'effet voulu, il faut bien entrer une liste de liste représentant une matrice, c'est-à-dire pour laquelle toutes les "lignes" sont de la même longueur.

Exercice 2. 1. Définir en Python les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Afficher ces matrices avec la commande `print` et constater la particularité de l'affichage.

2. Taille d'une matrice, accès aux coefficients, aux lignes et aux colonnes

Taille d'une matrice : la fonction `shape`

Soit `A` une variable de type `array`.

Alors, la commande `np.shape(A)` renvoie le couple `(n,p)` formé du nombre `n` de lignes de `A` et du nombre `p` de colonnes de `A`.

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$:

```
A=np.array([ [1, 2], [3, 4], [5, 6] ])
n, p = np.shape(A)
print(n) # Affiche 3
print(p) # Affiche 2

B=np.array([ [ 2, 3, 2, 3 ] ])
n, p = np.shape(B)
print(n) # Affiche 1 : B est une matrice ligne...
print(p) # Affiche 4 : ...de taille 4

C=np.array([ [1], [3], [5] ])
print(np.shape(C)) # Affiche (3,1) : C est une matrice colonne de taille 3
```

Remarque. Attention aux matrices lignes.

- Pour saisir une matrice ligne comme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on doit bien **mettre deux crochets** dans la commande :

```
np.array( [ [1, 2, 3] ] )
```

Autrement dit, on rentre bien un matrice en donnant la liste de ses lignes, même si celle-ci n'a qu'une ligne.

- Soit $L=[x_1, \dots, x_n]$ une liste de nombres.

Alors, la commande `X=np.array(L)` crée une variable `X` de type `array` représentant **le vecteur** (x_1, \dots, x_n) (un vecteur n'est ici rien d'autre qu'un élément de \mathbb{R}^n pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$).

La différence avec la notion de matrice ligne est minime mais existe. Par exemple, la taille d'un vecteur n'est pas un couple d'entiers mais un 1-uplet formé d'un entier, ce qui peut provoquer un problème d'exécution dans un code utilisant `np.shape` écrit pour des matrices. Par exemple :

```
X=np.array([ 1, 2, 3])
print(np.shape(X)) # affiche (3,) (et non (1,3))
n,p=np.shape(X) # provoque une erreur
```

Exercice 3. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `test_produit`, prenant en paramètres deux variables de type `array` `A` et `B` représentant des matrices et renvoyant en sortie `True` si le produit matriciel `AB` est correctement défini et `False` sinon.

Accès aux coefficients d'une matrice, aux lignes et aux colonnes (première version)

Soit A une variable de type `array` représentant une matrice. Notons (n, p) la taille de la matrice représentée par A . Alors :

- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, les commandes `A[i, j]` et `A[i][j]` renvoient le coefficient d'indice $(i+1, j+1)$ de la matrice représentée par A .
- Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les commandes `A[i]` et `A[i, :]` renvoient le **vecteur** donné par la $i+1$ -ième ligne de la matrice représentée par A .
- Pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la commande `A[:, j]` renvoie le **vecteur** donné par la $j+1$ -ième colonne de la matrice représentée par A .

Remarque. Attention, comme pour les listes, l'indexation des coefficients commence à 0 en Python ! C'est une source d'erreur très courante au début, prenez vite la bonne habitude d'y penser.

Exemple 4. Anticiper les affichages suivants, puis vérifier avec Python (avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$):

```
A=np.array([ [1, 2, 3], [4, 5, 6]])
print(A[1,1]) # Affiche ...
print(A[0,2]) # Affiche
print(A[1,:]) # Affiche
print(A[:,2]) # Affiche
print(A[:,3]) # Affiche
```

Indice d'une variable de type array

A partir de maintenant, dans ce TP, si A est une variable de type `array` représentant une matrice, l'indice d'un coefficient, d'une ligne ou d'une colonne de l'objet A désignera son indice en Python.

Par exemple, la première ligne (au sens classique) d'un objet A de type `array` sera désignée comme sa ligne d'indice 0. Le coefficient d'indice $(1, 2)$ de la matrice représentée par A sera désigné comme le coefficient d'indice $(0, 1)$ de A .

Accès aux lignes et aux colonnes (deuxième version), extraction de sous-matrices

Soit A une variable de type `array` représentant une matrice, dont on note (n, p) la taille.

Soient d, f deux éléments de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $d < f$.

Soient d', f' deux éléments de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tels que $d' < f'$.

- La commande `A[d:f, :]` renvoie l'objet de type `array` obtenu à partir de A en gardant uniquement les lignes de A de l'indice d à l'indice $f-1$.
- La commande `A[:, d':f']` renvoie l'objet de type `array` obtenu à partir de A en gardant uniquement les colonnes de A de l'indice d' à l'indice $f'-1$.
- La commande `A[d:f, d':f']` renvoie l'objet de type `array` obtenu à partir de A en gardant uniquement les lignes de A de l'indice d à l'indice $f-1$ et les colonnes de A de l'indice d' à l'indice $f'-1$.
- Par conséquent, la commande `A[d:d+1, :]` renvoie la ligne d'indice d de A en tant qu'objet de type `array` représentant une matrice.
- Par conséquent, la commande `A[:, d':d'+1]` renvoie la colonne d'indice d' de A en tant qu'objet de type `array` représentant une matrice.

Exemple 5. A partir de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, on peut définir en Python les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ de la manière suivante.

```
A= np.array([[2, 4, 6], [2, 4, 8], [2, 4, 1]])
B= A[1:2,: ] # B est la ligne d'indice 1 de A, en tant que matrice
C= A[0:2,1:3] # C est obtenue à partir de A en gardant les lignes d'indice 0 et 1 et
               colonnes d'indices 1 et 2.
```

3. Modification d'une matrice, copie d'une matrice

Comme pour les listes, les coefficients d'un objet de type `array` sont des variables. On peut donc les modifier avec `=`.

Au début de ce code (après la première ligne), la variable `A` représente la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

```
A=np.array([ [1, 2], [3, 4] ])
print(A) # Affiche [[1 2]
          #           [3 4]]

A[0,0]=3 # Changement du coefficient d'indice (0,0)
A[1,0]=6 # Changement du coefficient d'indice (1,0)
print(A) # Affiche [[3 2]
          #           [6 4]]
```

À la fin de ce code, la variable `A` représente la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme pour les listes, l'utilisation du symbole `=` pour définir une nouvelle variable contenant une matrice lie ces matrices.

```
A=np.array([[1,2], [3,4] ])
B=A
B[0,0]=10
print(B) #Affiche [[10 2]
          #          [ 3 4]]
print(A) #Affiche [[10 2]
          #          [ 3 4]]
```

Pour copier une matrice **en une matrice indépendante**, on peut utiliser la commande `np.copy`

```
A=np.array([[1,2], [3,4] ])
B=np.copy(A)
B[0,0]=10
print(B) #Affiche [[10 2]
          #          [ 3 4]]
print(A) #Affiche [[1 2]
          #          [ 3 4]]
```

4. Égalité de matrices

Attention, le **test d'égalité** `==` entre deux matrices fonctionne de manière très particulière.

Exemple 6. Recopier et exécuter dans l'invite de commande :

```
>>> A=np.array([[1,2], [3,4]])
>>> B=np.array([[2,1], [3,4]])
>>> A==B
```

Qu'est-ce qui est renvoyé par ce test d'égalité ?

Exercice 7. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def EgaliteMatrices(A,B)` : prenant en entrée deux matrices `A` et `B` (de type `array`), et renvoyant `True` si ces matrices sont égales, et `False` sinon. *On rappelle que deux matrice sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes familles de coefficients.*

On pourra utiliser les opérateurs de comparaison (`==`, `>=`, `>...`) en ayant remarqué le caractère particulier de la valeur renvoyée.

Opérateurs booléens et matrices

Soient A et B deux objets de type `array` de même taille (n, p) .

- La commande `A==B` renvoie l'objet de type `array` de taille (n, p) dont le coefficient d'indice (i, j) est le renvoi de :

$$A[i, j] == B[i, j]$$

(pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.)

- Si k est une variable numérique, la commande `A>k` renvoie l'objet de type `array` de taille (n, p) dont le coefficient d'indice (i, j) est le renvoi de :

$$A[i, j] > k$$

(pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.)

- Le point précédent est valable à l'identique avec les autres opérateurs de comparaison (`==`, `>=`, `<`, `<=`) entre une matrice et un nombre.

Exercice 8. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `coefficients_pairs`, prenant en paramètres une matrice A à coefficients entiers relatifs et renvoyant en sortie `True` si tous les coefficients de A sont pairs et `False` sinon.

5. Créations de matrices

Il existe de nombreuses commandes permettant de définir des matrices sans devoir saisir les coefficients à la main.

Matrices remarquables

Soient n et p deux variables de type `int`.

- `np.zeros((n,p))` renvoie la matrice nulle de taille (n, p) .
- `np.ones((n,p))` renvoie la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients valent 1.
- `np.eye(n)` (ou `np.identity(n)`) renvoie la matrice identité de taille n .
- `np.eye(n,p)` renvoie la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent 1.
- `np.zeros(n)` renvoie le vecteur de longueur n dont tous les coefficients sont nuls.
- `np.ones(n)` renvoie le vecteur de longueur n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Remarque. Attention à la présence des double-parenthèses dans les commandes `np.zeros((n,p))` et `np.ones((n,p))`. Les oublier provoquera une erreur. On retiendra que ces commandes prennent en argument une **taille**, et qu'une taille est un couple pour une matrice.

Exemple 9.

```
A = np.zeros(3)
print(A) # Affiche [0. 0. 0.]

B = np.zeros((2,2))
print(B) # Affiche [[0. 0.]
#           [0. 0.]]

C = np.ones(5)
print(C) # Affiche [1. 1. 1. 1. 1.]

D = np.ones((3,3))
print(D) # Affiche [[1. 1. 1.]
#           [1. 1. 1.]
#           [1. 1. 1.]]

E = np.eye(3)
print(E) # Affiche [[1. 0. 0.]
#           [0. 1. 0.]
#           [0. 0. 1.]]

F = np.eye(2,4)
print(F) # Affiche [[1. 0. 0. 0.]
#           [0. 1. 0. 0.]
```

Remarque. Les commandes `np.linspace` et `np.arange` rencontrées lors du TP définissent des vecteurs de type `array`. Ça peut être pratique dans certaines situations. Par exemple :

`X=np.arange(0,2,0.5)` a le même effet que `X = np.array([0, 0.5, 1, 1.5])`.

6. Une stratégie courante pour définir des matrices

Très souvent, pour définir une matrice donnée en Python :

- On définit une matrice `A` de la bonne taille dont les coefficients sont tous nuls avec la commande
`A=np.zeros((n,p))`
- On affecte un à un les coefficients de `A` à l'aide de boucles.

Exercice 10. On pose, pour tous entiers i et j , $a_{i,j} = 2^i 3^{j+1}$. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,20 \rrbracket \times \llbracket 1,10 \rrbracket}$ en Python.

Exercice 11. Dans cet exercice, on suppose que les fonctionnalités de la partie II ne sont pas connues. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `somme_matrices`, prenant en paramètres deux matrices A et B de même taille et renvoyant en sortie la matrice $A + B$.

Exercice 12. Dans cet exercice, on suppose que les fonctionnalités de la partie II ne sont pas connues. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `transpose_matrice`, prenant en paramètre une matrice A et renvoyant en sortie la matrice tA .

Exercice 13. Dans cet exercice, on suppose que les fonctionnalités de la partie II ne sont pas connues. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `produit_matrices`, prenant en paramètres deux matrices (Python) A et B telles que le produit AB est correctement défini et renvoyant en sortie la matrice AB .

Exercice 14. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `test_commutation`, prenant en paramètres deux matrices carrés A et B de même taille et renvoyant en sortie `True` si les matrices A et B commutent et `False` sinon.

II. Opérations sur les matrices

On va maintenant voir les opérations disponibles sur les objets de type `array`.

A partir de maintenant, on parlera simplement de matrice pour désigner des variables Python de type `array` représentant des matrices.

1. Opérations coefficients par coefficients

Opérations arithmétiques de base entre matrices

Soient A et B deux matrices de même taille.

Alors, les opérations arithmétiques usuelles : $+$, $-$, $*$, $/$, $**$ s'appliquent coefficients par coefficients aux matrices avec les commandes :

`A+B`, `A-B`, `A*B`, `A/B`, `A**B`,

à condition que tous les calculs intervenant soient correctement définis.

Remarque. Dans certains cas, il peut y avoir des problèmes si A et B ont des coefficients de type `int`. On travaille généralement avec des coefficients de type `float` pour éviter ça, même si ceux-ci sont des entiers.

Exemple 15. Vérifier la compréhension du point précédent en observant les valeurs affichées par les commandes ci-dessous.

```
A=np.array([ [2.0, 1.0], [0.0, 3.0] ])
B=np.array([ [-1.0, 1.0], [4.0, 2.0] ])

print(A+B)
print(A-B)
print(A*B)
print(A/B)
print(A**B)
```

Remarque. En particulier, le symbole de multiplication $*$ n'est pas le produit matriciel. Par contre, la somme $+$ et la différence $-$ donnent bien la somme et la différence matricielle.

Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et x un réel (de type `float` ou `int`). Alors, la commande :

$$x * A$$

renvoie la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par x .

Remarque. On a bien l'opération \cdot de multiplication d'une matrice par un réel avec le symbole $*$.

Exemple 16. Vérifier ce qui précède en exécutant le code suivant.

```
A = np.array([[2.0, 0.0], [1.0, 3.0]])
B = 3 * A
C = -2 * np.eye(3)
print(A)
print(B)
print(C)
```

Somme d'une matrice et d'un réel

Soit A une matrice et x un réel (de type `float` ou `int`). Alors, la commande :

$$A + x$$

renvoie la matrice obtenue en ajoutant x à chaque coefficient de A .

Remarque. Attention, n'écrivez pas n'importe quoi dans vos copies : cette opération n'existe toujours pas en mathématiques.

Exemple 17. Vérifier ce qui précède en exécutant le code suivant.

```
A = np.array([[1, 3], [-2, 5]])
print(A+2)
print(A-5)
print(3*A+1)
```

Fonctions usuelles de numpy

Soit A une matrice. Alors, l'application des fonctions usuelles de `numpy` (`p.abs`, `np.sqrt`, `np.exp`, `np.log`, `np.floor`) à la matrice A renvoie la matrice obtenue en appliquant ces fonctions à chaque coefficients de A .

Exemple 18. Vérifier ce qui précède en exécutant le code suivant.

```
A=np.array([ [1.1, 2.3], [3.5, 4.0] ])
print(np.sqrt(A))
print(np.exp(A))
print(np.floor(A))
```

On peut également, à partir d'une fonction f définie par vos soins, créer une version de f qui s'applique coefficient par coefficient à une matrice.

Vectorisation de fonctions : `np.vectorize`

Soit f une fonction informatique représentant une fonction réelle de la variable réelle.

Alors, la commande `g = np.vectorize(f)`

créer une fonction g qui applique la fonction f coefficient par coefficient à une matrice donnée en entrée : l'appel de `g(A)` renvoie la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient a de A par $f(a)$, et ce pour toute matrice A .

Exemple 19. Vérifier ce qui précède en complétant et en exécutant le code suivant.

```

def f(x):
    # f(x) renvoi x si x >0 et 0 sinon.
    if x >0:
        return(x)
    return(0)

A=np.array([ [6, -2], [-3, 1] ])
g=np.vectorize(f)
print(g(A))

```

2. Produit matriciel et transposition

Produit matriciel

Soient A et B deux matrices Python représentant des matrices A et B telles que le produit AB soit bien défini.

Alors, la commande

```
np.dot(A,B)
```

renvoie la matrice Python représentant la matrice AB .

Transposition

Soit A une matrice Python.

Alors, la commande

```
np.transpose(A)
```

renvoie la transposée de A .

Exemple 20. Vérifier ce qui précède en exécutant le code suivant.

```

A=np.array([[ 0, 1], [0, 0] ])

print("Transposée : ", np.transpose(A))
print("Carré de A : ", np.dot(A,A))

B=np.array([ [1, 1], [1, 1] ])
print(np.dot(A,B))
print(np.dot(B,A))

```

Exercice 21. Dans cet exercice, on suppose que les fonctionnalités de la partie suivante ne sont pas connues. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `puissance_matrice`, prenant en paramètres une matrice carrée A et un entier naturel n et renvoyant en sortie la matrice A^n .

Exercice 22. 1. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `est_symetrique`, prenant en paramètre une matrice A et renvoyant en sortie `True` si la matrice A est symétrique et `False` sinon.

2. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `est_antisymetrique`, prenant en paramètre une matrice A et renvoyant en sortie `True` si la matrice A est antisymétrique et `False` sinon.

3. Plus d'opérations avec le sous-module `numpy.linalg` de `numpy`

Le sous module `numpy.linalg` de `numpy` contient des commandes permettant des opérations plus avancées sur les matrices (et vous en verrez bien d'autres l'année prochaine).

Cette année, on utilisera deux commandes :

- Une commande permettant de calculer des puissances d'une matrice carrée (plutôt que d'utiliser `np.dot` de manière répétée,
- Une commande permettant de calculer l'inverse d'une matrice inversible.

Import du sous-module `numpy.linalg`

Dans les encadrés ci-dessous, on supposera le module `numpy.linalg` importé à l'aide de la commande :

```
import numpy.linalg as al
```

Puissances d'une matrice carrée

Soit `A` une matrice carrée (en Python).
Alors, pour toute variable `n` de type `int`, la commande
`al.matrix_power(A,n)`
renvoie la puissance `n`-ième A^n de la matrice `A`.

Exemple 23. Utiliser cette commande pour afficher les puissances A^k de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$. Que remarquez-vous ?

Inverse d'une matrice inversible

Soit `A` une matrice Python représentant une matrice inversible.
Alors, l'inverse de `A` est renvoyé par la commande :

```
al.inv(A)
```

Exemple 24. Donner l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III. Exercices

Exercice 25. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `somme_puissances_matrice`, prenant en paramètres une matrice carrée A telle que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoyant en sortie la matrice $I_n + A + \dots + A^n$.

On pourra observer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $I_n + A + \dots + A^k = I_n + A(I_n + A + \dots + A^{k-1})$.

Exercice 26. Dans cet exercice, on s'intéresse à la création informatique du triangle de Pascal. Les matrices à construire ne devront pas l'être en saisissant à la main les coefficients un par un.

1. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. On utilisera la même méthode que celle qu'on utilise pour écrire le triangle de Pascal à la main.
3. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `triangle_Pascal`, prenant en paramètre un entier naturel `n` et renvoyant en sortie la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont ceux du triangle de Pascal, de $\binom{0}{0}$ jusqu'à $\binom{n}{n}$. Tester ensuite cette fonction pour $n = 10$.
4. Écrire le code d'une fonction Python, nommée `VdM`, prenant en paramètre un entier naturel `n` et renvoyant en sortie la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

5. À l'aide de nombreux tests effectués grâce à cette fonction, conjecture, puis démontrer, une formule explicite donnant la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'implémentation de l'algorithme du pivot de Gauss.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

- À l'aide de Python, effectuer les opérations élémentaires suivantes sur la matrice A sans redéfinir à la main les coefficients un à un :
 - échanger les lignes L_1 et L_3 .
 - puis remplacer la ligne L_2 par $2L_2 + L_1$
 - puis remplacer la ligne L_3 par $2L_3 + L_2$

Afficher la matrice obtenue : que peut-on conclure?

- Écrire le code d'une fonction Python, nommée `multiplie_ligne`, prenant en paramètres une matrice A , un nombre réel a et un entier naturel i et renvoyant en sortie la matrice obtenue à partir de A en multipliant terme à terme par a tous les coefficients de la ligne d'indice i .
- Écrire le code d'une fonction Python, nommée `echange_lignes`, prenant en paramètres une matrice A et deux entiers naturels i et j et renvoyant en sortie la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes d'indices i et j .
- Écrire le code d'une fonction Python, nommée `combinaison_lignes`, prenant en paramètres une matrice A , deux nombres réels a et b et deux entiers naturels i et j et renvoyant en sortie la matrice obtenue à partir de A en remplaçant L_i par la combinaison $aL_i + bL_j$.

- Tester les fonctions définies ci-dessus pour effectuer les opérations élémentaires suivantes sur la matrice B :
 - $L_2 \leftrightarrow L_3$
 - $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
 - $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$
 - $L_3 \leftarrow 6L_3 + 4L_2$

Faire afficher la matrice obtenue : la matrice B est-elle inversible?

- Écrire le code d'une fonction Python, nommée `pivot_Gauss`, prenant en paramètres une matrice A et renvoyant en sortie la matrice obtenue par application de l'algorithme du pivot de Gauss au système linéaire associé à A jusqu'à le mettre sous forme triangulaire.

Tester cette fonction avec la matrice $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.