Programme de colle n^o 18 : Calcul matriciel.

*Semaine du lundi **10 février**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Matrices, opérations

18.1 Se reporter au programme précédent.

Matrices carrées

18.2 Puissances d'une matrice carrée : se reporter au programme précédent.

18.3 Identités en présence de matrices qui commutent : se reporter au programme précédent.

18.4 Matrices triangulaires et diagonales : définition, notations $\mathcal{T}_n^{\text{inf}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^{\text{sup}}(\mathbb{R})$. La somme et le produit de deux matrices triangulaires inférieures sont triangulaires inférieures (idem pour triangulaires supérieures et diagonales). Propriété similaire pour la puissance. La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (idem pour supérieure et inférieure).

18.5 Matrices symétriques et antisymétriques : définition et notation $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Toute matrice antisymétrique a ses coefficients diagonaux nuls.

Matrices carrées inversibles

18.6 Notion de matrice inversible. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$ et cette matrice est appelée l'inverse de A et notée A^{-1}. Caractérisation de l'inversibilité par l'inversibilité à droite ou à gauche. Exemple des matrices de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Énoncé sur l'inversibilité à droite et à gauche admis.

18.7 Propriétés de l'inverse : produit de matrices inversibles, transposée d'une matrice inversible, puissance d'une matrice inversible. Toute matrice inversible est simplifiable à droite et à gauche. Si A est inversible, alors $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ (pour toutes matrices X et Y de la bonne taille).

18.8 Résultat HP à savoir refaire en autonomie si besoin : si A et B sont deux matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $AB = 0_n$ et $B \neq 0_n$, alors A n'est pas inversible.

18.9 Inversibilité et inverse des matrices diagonales.

18.10 Caractérisation de l'inversibilité des matrices $(2, 2)$ par le déterminant.

18.11 Notation $P(A)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et où A est une matrice carrée. Utilisation d'une relation de la forme $P(A) = 0$ pour étudier l'inversibilité de A.

Systèmes linéaires, matrices et inversibilité

18.12 Matrice associée à un système linéaire. Système linéaire associée à une équation matricielle de la forme $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et forme matricielle d'un système linéaire. Correspondance entre les solutions de ces deux formes (prop. 69).

18.13 Remarque : la mise en oeuvre de l'algorithme du pivot de Gauss, et donc le caractère "de Cramer" d'un système linéaire carré (S), ne dépend pas du second membre. Reformulation matricielle de ce résultat (prop. 72).

18.14 Soit (S) un système linéaire carré. Alors, (S) est de Cramer si et seulement si la matrice A associée à (S) est inversible. Dans ce cas, l'unique solution de l'équation $AX = Y$ est donnée par $X = A^{-1}Y$.

18.15 Application du résultat précédent pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée via la résolution d'un système linéaire de second membre indéterminé.

Sera terminé Lundi.

18.16 Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires.

Sera fait lundi.

Python

18.17 Algorithmes gloutons : problèmes d'allocations de salles, avec un algorithme glouton optimal (optimalité admise).

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de matrice triangulaire supérieure. Énoncer les propositions liant les notions de matrices triangulaires supérieures, inférieures ou diagonales aux opérations de somme, de produit, de transposition et de mise à la puissance. Montrer qu'un produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.
2. Définir la notion de matrice inversible. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant l'inverse d'une matrice inversible. Énoncer la proposition admise liant la notion d'inversibilité à l'existence d'un inverse à droite ou à gauche.
3. Énoncer et démontrer la proposition donnant des résultats d'inversibilité sur le produit, la transposée ou la puissance de matrices inversibles.
4. Définir le déterminant d'une matrice de taille $(2, 2)$. Montrer qu'une telle matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
5. Définir la notation $P(A)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et A est une matrice carrée. Donner trois exemples. On pose $P(X) = X^2+X+1$, montrer que si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $P(A) = 0_n$, alors A est inversible.
6. Donner la forme matricielle du système linéaire (S) suivant (au choix de l'interrogation). Énoncer et démontrer la proposition (69) liant les solutions d'un système linéaire (S) aux solutions de la forme matricielle de (S).
7. Énoncer et démontrer le théorème (73) liant la notion de système de Cramer à la notion de matrice inversible. Pour le sens plus difficile, pour gagner du temps, on pourra (au choix de l'élève) expliquer proprement à l'écrit les deux principes utilisés et compléter par une explication orale.
8. Inverser la matrice $(3, 3)$ suivante.
9. Expliquer oralement le problème d'allocation de salle vu en TP (version "une salle de conférence") et donner un code Python complet permettant de traiter une liste de demandes donnée.