Chapitre 13 : Fonctions continues sur un intervalle.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Fonctions continues sur un intervalle

1. Rappels sur la continuité en un point

Définition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où I est un intervalle. Soit $x_0 \in I$.

(i) On dit que f est continue en x_0 si

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

(ii) On dit que f est continue à droite en x_0 si :

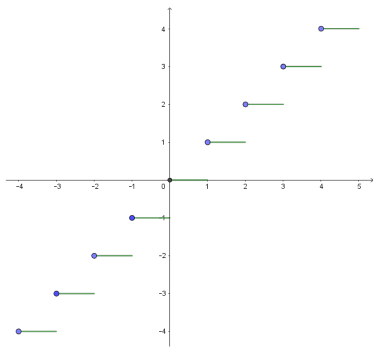
$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} f(x_0).$$

(iii) On dit que f est continue à gauche en x_0 si :

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} f(x_0).$$

Si f n'est pas continue en un point, on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Exemple 2. La fonction partie entière...



(i) est continue en tout réel x tel que $x \notin \mathbb{Z}$,

(ii) est continue à droite en x si $x \in \mathbb{Z}$,

(iii) n'est pas continue à gauche en x si $x \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3. *Dans le contexte de la définition précédente :*

(i) *si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0.*

(ii) *si x_0 est la borne inférieure (resp. supérieure) de I et $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0 ssi f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.*

Exemple 4. La fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ si } x \neq 3 \\ \frac{1}{4} \text{ si } x = 3 \end{cases} \end{array} \right.$ est-elle continue en 3 ?

2. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition 5. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit I une partie de D_f. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^0(I)$, ou encore $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Proposition 6. *Les fonctions polynomiales, exponentielle, logarithme, valeur absolue et les fonctions puissances généralisées sont continues sur leur domaine de définition.*

Remarque. La seule fonction usuelle que l'on sera mené à manipuler non continue sur son domaine de définition est donc la fonction partie entière, discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Cf chapitre sur les limites. $\square$

Proposition 7. *Soient f et g deux fonctions. Soit I un intervalle* ***ouvert*** *sur lequel f et g sont définies.*
Si : $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ (on dit que f et g coïncident sur I),
alors : f est continue sur I si et seulement si g est continue sur I.

Démonstration. Cf chapitre sur les limites. $\square$

Remarque. L'intervalle doit être ouvert! Contre exemple : la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (qui n'est pas ouvert), mais f n'est pas continue en 0 alors que la fonction nulle l'est. On ne peut pas conclure sur la borne fermée 0, mais on peut tout de même conclure que f est continue sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 8. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

(i) $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

(ii) $g : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$.

3. Opérations

Proposition 9. *Soient f et g deux fonctions définies et continues en un point x_0. Soit λ un réel.*

(i) Alors, les fonctions λf, $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0.

(ii) Si de plus g ne s'annule pas en x_0, alors $\dfrac{f}{g}$ est (définie et) continue en x_0.

Démonstration. Cf cours sur les limites. $\square$

Conséquence immédiate de la définition :

Proposition 10. *Soient f et g deux fonctions définies et continues sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit λ un réel.*

(i) Alors, les fonctions λf, $f + g$ et fg sont continues sur D.

(ii) Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est (définie et) continue sur D.

Démonstration. À noter. □

Une version plus pratique :

Proposition 11. *Soient f et g deux fonctions continues sur leur domaine de définition. Alors, $f+g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ et (pour tout réel λ) λf sont continues sur leur domaine de définition.*

Démonstration. On applique la proposition précédente sur le domaine de définition de la fonction considérée. □

Remarque. Rappel. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Si $f(I) \subset J$, alors, $g \circ f$ est bien définie comme fonction de I vers $\mathbb{R}$.

Proposition 12. *Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On suppose que $f(I) \subset J$.*

(i) Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

(ii) Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de composition pour les limites (à noter). □

Une version plus pratique :

Proposition 13. *Soient f et g deux fonctions continues sur leur domaine de définition. Alors, $g \circ f$ est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration. À noter. □

Ces énoncés permettent de justifier la continuité de fonctions réelles.

Exemple 14. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2) + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II. Le théorème des valeurs intermédiaires

Remarque. Attention, dans toute la suite chapitre, **la notion d'intervalle** est très importante : la majorité des résultats seront pour des fonctions définies (ou continues) sur un intervalle (non vide et, généralement, contenant au moins deux points pour avoir quelque chose d'intéressant).

1. Énoncé et démonstration

a) Théorème et conséquences classiques

Théorème 15. ***Théorème des valeurs intermédiaires.***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.
Alors, toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur le segment $[a, b]$. Autrement dit :

(i) Si $f(a) \leq f(b)$:
$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b], f(c) = y.$$

(ii) Si $f(b) \leq f(a)$:
$$\forall y \in [f(b), f(a)], \exists c \in [a, b], f(c) = y.$$

Démonstration. Voir b). □

Ce théorème implique immédiatement les énoncés suivants :

Proposition 16. *Si une fonction continue change de signe sur un intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle.*
Plus précisément, soit $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I, soient a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.
Supposons $f(a)f(b) \leq 0$, alors :

$$\exists c \in [a, b], f(c) = 0$$

Démonstration. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes (large) opposé.

Donc ou bien $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, ou bien $f(b) \leq 0 \leq f(a)$.

- Premier cas : $f(a) \leq 0 \leq f(b)$.

  Alors, f est continue sur I, $(a, b) \in I^2$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires :

  $$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b], f(c) = y.$$

  En particulier, $0 \in [f(a), f(b)]$ donc $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$.

- Second cas : $f(b) \leq 0 \leq f(a)$.

  Alors, f est continue sur I, $(a, b) \in I^2$ et $0 \in [f(b), f(a)]$ donc de même, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$.

Dans tous les cas :

$$\exists c \in [a, b], f(c) = 0.$$

□

Remarque. On admet le fait suivant (accessible mais un peu théorique) : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall c \in [a, b], c \in I.$$

On dit que les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

On peut alors démontrer une autre formulation classique du théorème des valeurs intermédiaires :

Proposition 17. *L'ensemble image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. A noter. □

Remarque. (17*) Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors, la version précédente permet de conclure que $f([a, b])$ et un intervalle (on verra que c'est même un segment), mais **sûrement pas** que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (à noter). Juste que c'est **un** intervalle.

Méthode : Le théorème des valeurs intermédiaires permet très souvent de montrer qu'une équation a des solutions.

Exemple 18. Montrons que l'équation $x^4 + 5x = 1$ admet une solution dans le segment $[0, 1]$.

Exemple 19. Montrons que l'équation $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{3}$ admet une solution dans $[1, 3]$.

Dans un cadre plus théorique :

Exemple 20. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$. Supposons l'existence de réels a et b tels que $f(a) \geq g(a)$ et $f(b) \leq g(b)$. Montrons qu'il existe un réel x tel que $f(x) = g(x)$.

Enfin, voici une conséquence classique hors programme : il faut savoir refaire le raisonnement pour s'en servir **en se ramenant à l'application du théorème des valeurs intermédiaires** "sur un segment".

Exemple 21. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $\mathbb{R}_+ \subset f(\mathbb{R}_+)$.

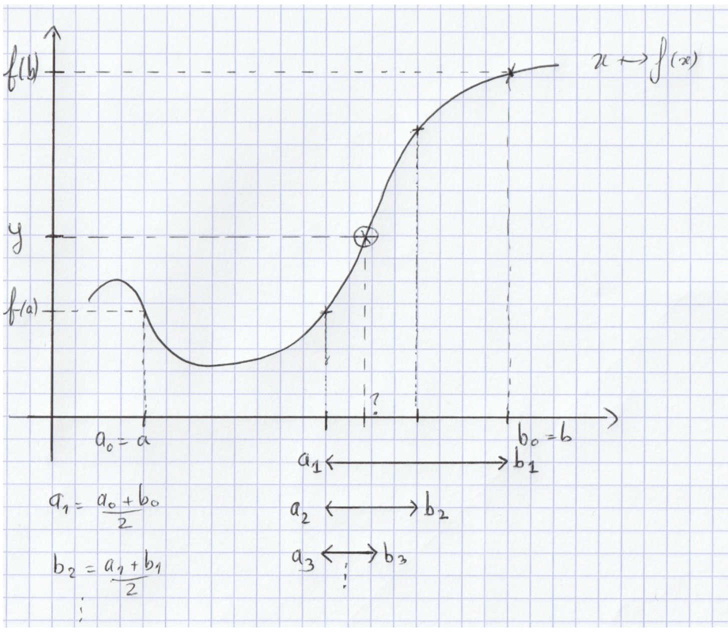
b) Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie

Démontrons le théorème des valeurs intermédiaires. Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

Supposons ici $f(a) \leq f(b)$ et soit $y \in [f(a), f(b)]$.

Remarque. Si $f(a) \geq f(b)$, la démonstration s'adapte sans problème. On peut aussi appliquer ce résultat à $-y$ avec la fonction $-f$.

On cherche à montrer l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Idée à retenir :

D'abord, on construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que :

(i) $a_0 = a$ et $b_0 = b$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$,

(iii) (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante,

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Ensuite, on montre que ces suites sont adjacentes et convergent vers un antécédent de y.

Démonstration. (suite) À noter. $\square$

Python : Cet algorithme implémente la méthode de la dichotomie et renvoie une approximation, avec une précision donnée en entrée, d'une solution c de $f(c) = y$. Entrées :

- une fonction réelle donnée par la fonction Python `f`,
- deux variables numériques `a` et `b`,
- un nombre `y` entre `f(a)` et `f(b)`,
- un flottant `precision` qui donne la précision avec laquelle on veut un antécédent de `y` par f

```python
def Dichotomie(f,a,b,y,precision):
    # Ce test adapte l'algorithme au cas : f(a)>=y>=f(b)
    if f(a)> y:
        a,b=b,a
    # on a donc maintenant f(a) <= y <= f(b)
    while abs(b-a)>precision:
        c=(a+b)/2
        if f(c)<y:
            a,b=c,b
        else:
            a,b=a,c
    #fin de boucle : a et b sont proches, a (ou b) approxime c.
    return(a)
```

2. Bornes d'une fonction : inf, sup, min et max

Définition 22. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

(*i*) Si f est minorée sur I, on appelle borne inférieure de f sur I, et on note $\inf_I(f)$, le plus grand des minorants de f (dont on admet l'existence). Si f n'est pas minorée sur I, on définit

$$\inf_I(f) = -\infty.$$

(*ii*) Si f est majorée sur I, on appelle borne supérieure de f sur I, et on note $\sup_I(f)$, le plus petit des majorants de f (dont on admet l'existence). Si f n'est pas majorée sur I, on définit :

$$\sup_I(f) = +\infty.$$

Exemple 23. si $f : x \mapsto x^2$, alors

$$\inf_{\mathbb{R}}(f) =$$
$$\sup_{\mathbb{R}}(f) =$$

Remarque. On dispose de la notation équivalente suivante :

$$\inf_I(f) = \inf_{x\in I}(f(x))$$

(et idem pour sup).

Remarque. Une fonction f est minorée sur I si et seulement si $\inf_I(f)$ est un réel. Par contre, ce réel n'est pas toujours une valeur atteinte par f. Exemple :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}(e^x) = 0.$$

Proposition 24. *(i) Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un minimum sur I, alors $\min_I(f) = \inf_I(f)$.*

(ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un maximum sur I, alors $\max_I(f) = \sup_I(f)$.

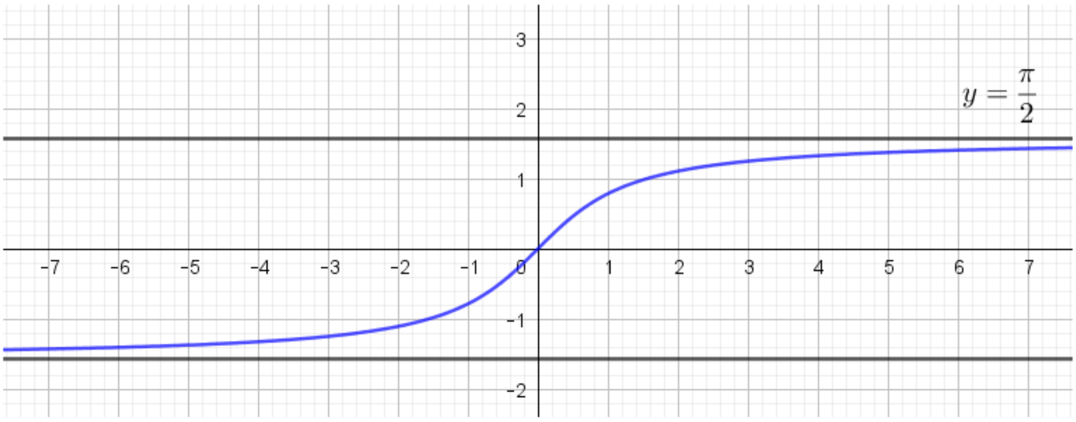
Démonstration. À noter. □

Réciproquement, on peut dire que si $\inf_I(f) \in f(I)$, alors la fonction f admet un minimum sur I, et

$$\inf_I(f) = \min_I(f).$$

Idem pour sup et max.

Exemple 25. Par lecture graphique, la fonction f représentée par le graphe ci-dessous semble vérifier...



Borne inférieure :

Borne supérieure :

Maximum :

Minimum :

Méthode : Pour déterminer les bornes supérieures, bornes inférieures, minimum et maximum d'une fonction, on utilisera souvent son tableau de variation.

Exemple 26. Déterminer les bornes inférieures et supérieures sur $\mathbb{R}$, et les éventuels extrema, de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Voici une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires :

Proposition 27. ***(HP)*** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors :*

$$\forall y \in]\inf_I(f), \sup_I(f)[,\ \exists c \in I,\ f(c) = y.$$

Autrement dit, toute valeur entre $\inf_I(f)$ et $\sup_I(f)$ est atteinte par f sur I.

Démonstration. En annexe. □

Encore une conséquence :

Proposition 28. *Tout polynôme de degré impaire admet au moins une racine réelle.*

Démonstration. C'est un très bon exercice. C'est une application directe de la proposition précédente. □

3. Fonctions continues sur un segment : le théorème des bornes atteintes

Définition 29. On appelle segment tout intervalle de la forme $[a, b]$, avec a et b des réels tels que $a \leq b$.

Les segments sont donc les intervalles fermés et bornés. Par soucis de simplicité, on ne travaillera dans la suite qu'avec des segments non vides.

On sera forcé d'admettre la proposition suivante :

Proposition 30. *Toute fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum sur ce segment.*

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors le :

Théorème 31. ***(Théorème des bornes atteintes)***
L'image par une fonction continue d'un segment est un segment. Plus précisément, si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (avec a et b réels tels que $a \leq b$), alors f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$ et:

$$f([a, b]) = [\min_{[a,b]}(f), \max_{[a,b]}(f)].$$

Démonstration. A noter. ☐

Conséquence dans le cas d'une fonction monotone :

Proposition 32. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.*
(i) Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
(ii) Si f est décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Démonstration. On applique le théorème des bornes atteintes : si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) = \min_{[a,b]}(f)$ et $f(b) = \max_{[a,b]}(f)$. Idem dans l'autre sens si f est décroissante. ☐

Exemple 33. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On montre facilement que f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est continue et décroissante sur le segment $[1, 2]$. D'après le théorème des bornes atteintes,

$$f([1, 2]) = [f(2), f(1)] = [\frac{1}{4}, 1].$$

Cet énoncé permet donc, à l'aide d'un tableau de variation, de donner des images de segments assez simplement.

III. Le théorème de la bijection continue

1. Le théorème de la bijection monotone

Théorème 34. *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :*
(i) $f(I)$ est un intervalle,
(ii) f induit une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$,
(iii) $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$.
Plus précisément, f et f^{-1} est la même monotonie.

Démonstration. En annexe. Partie admise : f^{-1} est continue. ☐

Remarque. Une conséquence directe :

Si f est continue et strictement croissante sur un intervalle I, et si a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$, alors :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists! c \in [a, b], f(c) = y.$$

On a le même énoncé (en inversant le sens de $f(a)$ et $f(b)$) si f est strictement décroissante.

En pratique, pour utiliser ce théorème, on utilise l'énoncé supplémentaire suivant :

Proposition 35. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soient a et b les bornes, éventuellement infinies, de I. Alors, les bornes de $f(I)$ sont $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$, et I est ouvert en a (resp. en b) si et seulement si $f(I)$ est ouvert en $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (resp., en $\lim_{x\to b} f(x)$).*

Démonstration. (Ébauche) Plaçons nous dans le cas où f est strictement croissante, et $I = [a, b[$. Par stricte croissance de f, $\inf_I(f) = f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ et $\sup_I(f) = \lim_{x \to b} f(x)$. En effet :

(*i*) La première égalité est vraie, car f admet un minimum en a, et est continue en a.

(*ii*) la seconde égalité est vraie, car le théorème de la limite monotone assure que $\lim_{x \to b} f(x)$ majore f sur I, et on peut montrer (exercice théorique raisonnable) que cette limite est le meilleur majorant de f, c'est à dire sa borne supérieure.

Alors, la continuité de f permet de conclure que $f(I) = [\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)[$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

2. Méthode : Utilisation du tableau de variation

Pour utiliser le théorème de la bijection monotone, avec la proposition 35 permettant d'expliciter l'intervalle image, on utilise le tableau de variation de f.

Exemple 36. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$. Étudier la fonction f jusqu'à dresser son tableau de variation, et montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle à préciser.

Remarque. Attention aux questions de points fixes comme ci-dessous, qui s'appuient sur le théorème de la bijection monotone mais nécessitent de considérer une **fonction auxiliaire**.

Exemple 37. Considérons la fonction f donnée dans l'exemple précédent. Montrer qu'il existe un unique réel l tel que $f(l) = l$.

Remarque. Voici un autre exemple très instructif. La seconde question justifie le remplissage du tableau de variation de h^{-1} "que l'on veut faire spontanément". La troisième question de l'exemple ci-dessous présenter une technique classique permettant de déduire des limites faisant intervenir h^{-1} à partir de limites connues de h.

Exemple 38. (En annexe) Soit $h : x \mapsto \dfrac{2x^2}{1 + x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

(*i*) Montrer que h induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle à préciser.

(*ii*) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

(*iii*) Quelle est la limite de $\dfrac{h^{-1}(x)}{x}$ en $+\infty$?

Remarque : dans ce dernier exemple, on aurait aussi pu calculer explicitement h^{-1}, mais on est ici plus économe en calculs, et on ne peut pas toujours calculer une réciproque explicitement (cette méthode est plus générale).

3. Graphe de la réciproque

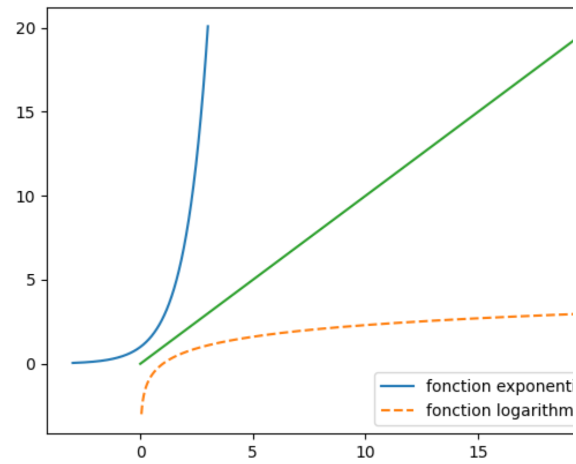
Pour mieux retrouver le théorème de la bijection monotone, il faut savoir ceci :

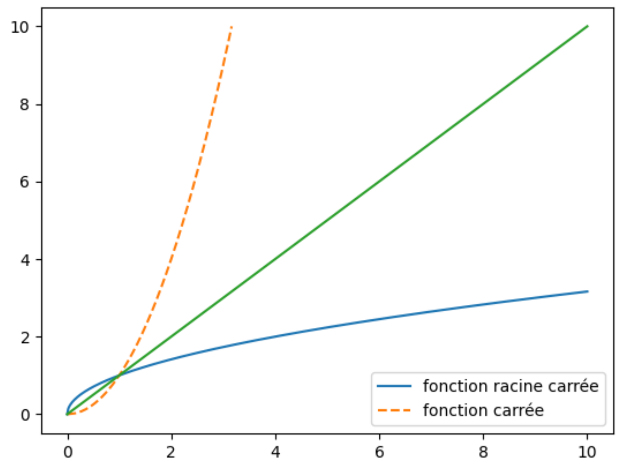
Proposition 39. *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle bijective. Alors, le graphe de $f^{-1} : J \to I$ est obtenu à partir du graphe de f par symétrie axiale le long de la droite d'équation $y = x$.*

Démonstration. En annexe. $\square$

Cela permet de retrouver les détails du théorème de la bijection, de la monotonie de f^{-1} aux bornes de $f(I)$.

Exemple 40. (Dessins réalisés avec le module matplotlib de Python)





IV. Annexe

Remarque. Soit f une fonction réelle et $D \subset \mathbb{R}$ une partie quelconque de $\mathbb{R}$. Supposons f définie sur D (D est donc inclus dans le domaine de définition de f). On dit que f est *continue* sur D si f est continue en chaque point de D. Tout le cours a été écrit avec des intervalles (par exemple, pour la notion de continuité) car les théorèmes du cours sont tous valide sur un intervalle (cette conditio nest essentielle). Mais on peut parler de continuité sur toute partie de $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$ (qui est une réunion d'intervalles).

Démonstration de la proposition 27

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $y \in]\inf_I(f), \sup_I(f)[$. Montrons :

$$\exists c \in I, f(c) = y.$$

Montrons que, sur l'intervalle I, y ne majore pas f.

Si $\sup_I(f) = +\infty$, alors f n'est pas majorée, donc y ne majore pas f. Sinon, $\sup_I(f)$ étant le plus petit majorant de f, $y < inf_I(f)$ montre que y ne majore pas f.

Dans tous les cas, y ne majore pas f sur I.

Donc il existe $a \in I$ tel que $f(a) > y$.

De même, si $\inf_I(f) + = -\infty$, alors f n'est pas minorée, et sinon $\inf_I(f) < y$ implique que y ne minore pas f.

Dans tous les cas, y ne minore pas f sur I.

Ainsi, il existe $b \in I$ tel que $f(b) < y$.

On dispose donc de deux réels a et b éléments de I tels que :

$$f(b) < y < f(a).$$

Considérons le segment S d'extrémités a et b ($S = [a, b]$ si $a \leq b$, $S = [b, a]$ sinon).

$a \in I$ et $b \in I$ et f est continue sur I.

De plus, $f(b) < y < f(a)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in S, f(c) = y.$$

Puisque $S \subset I$, ceci démontre bien :

$$\exists c \in I, f(c) = y$$

d'où le résultat voulu.

Démonstration du théorème 34

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. On supposera ici f strictement croissante, la démonstration du (iii) s'adaptant sans difficulté au cas "f décroissante".

(i) D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version prop. 17 non au programme), $f(I)$ est un intervalle.

(ii) f étant strictement monotone sur I, elle est injective sur I. Par conséquent, et vu le point (i), f induit une bijection $I \to f(I)$.

(iii) Notons ici $f^{-1} : f(I) \to I$ la réciproque de la bijection induite par f vue au point (ii).

Soit $(x, y) \in f(I)^2$. Supposons $x < y$.

Alors, $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$ sont éléments de I donc par croissance stricte de f sur I :

$$f^{-1}(y) > f^{-1}(x) \iff f(f^{-1}(y)) > f(f^{-1}(x)) \iff y > x$$

Le dernier point étant vrai par hypothèse, on a bien $f^{-1}(y) > f^{-1}(x)$.

Ceci démontre $\forall (x, y) \in f(I)^2, x < y \implies f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ donc f^{-1} est également strictement croissante, donc a bien la même monotonie que f. La continuité de f^{-1} est admise.

Remarque. Attention, dans la démonstration et l'énoncé ci-dessus, on a noté f^{-1} la réciproque de la bijection induite par f de I vers $f(I)$. En réalité, f n'est pas forcément bijective sur son domaine de définition, donc si on veut adopter cette notation il faut l'indiquer très clairement. Sinon, on choisira une autre lettre pour nommer ces fonctions.

Démonstration de la proposition 39

La symétrie axiale le long de la droite d'équation $y = x$ est :

$$s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array} \right.$$

(vous pouvez vous en convaincre sur un dessin, et le redémontrer géométriquement).

Soit Γ_f (resp. $\Gamma_{f^{-1}}$) le graphe de f (resp. de f^{-1}).

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma_{f^{-1}} &\iff x \in J \text{ et } y = f^{-1}(x) \\ &\iff (x, y) \in J \times I \text{ et } y = f^{-1}(x) \\ &\iff (x, y) \in J \times I \text{ et } f(y) = x \\ &\iff (y, x) \in \Gamma_f \end{aligned}$$

Autrement dit : $\Gamma_{f^{-1}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (y, x) \in \Gamma_f\} = \{s((x, y)) | (y, x) \in \Gamma_f\}$ ce qui est le résultat annoncé.

Exemple 38

Soit $h : x \mapsto \dfrac{2x^2}{1+x}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$.

(i) Montrer que h *induit une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *vers un intervalle à préciser.*

(ii) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

(iii) Quelle est la limite de $\dfrac{h^{-1}(x)}{x}$ *en* $+\infty$ *?*

(*i*) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \neq 0$.

donc h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables (car polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{4x(1+x) - 2x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(1+x)^2} = \frac{2x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

Or, $2x$, $x+2$ et $(1+x)^2$ sont positifs car $x \geq 0$, donc par produit et quotient :

$$h'(x) \geq 0$$

et par ailleurs, $h(x) = 0 \iff x = 0$. La dérivée de h est donc positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et s'annule en un nombre fini de points : h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, h étant continue (car dérivable) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de la bijection monotone, h induit une bijection :

$$\mathbb{R}_+ \to h(\mathbb{R}_+) = [h(0), \lim_{x \to +\infty} h(x)[.$$

Finalement, $h(0) = 0$ et on montre facilement que $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc :

h induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, et la réciproque de cette bijection est également strictement croissante.

Dans la suite de l'exercice, on note $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ cette bijection, et h^{-1} sa réciproque.

(*ii*) h^{-1} est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$. De plus, $h^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bijective donc surjective.

En particulier, h^{-1} est croissante et non majorée.

Par le théorème de la limite monotone, h^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

De plus, $h(0) = 0$ donc $h^{-1}(0) = 0$. On rempli le tableau de variation avec ces données.

(*iii*) *Voilà la question plus difficile de l'exercice. L'idée est qu'à partir d'étude de limite de quantités faisant intervenir h, on peut déduire les limites de quantités faisant intervenir* h^{-1}. *Pour montrer cela, on procède par composition par* h^{-1}.

Soit $t \geq 0$.

Alors, $\dfrac{t}{h(t)} = \dfrac{t(1+t)}{2t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$ (pour vous).

Mais d'après la question précédente :

$$h^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

donc par composition :

$$\frac{h^{-1}(x)}{h(h^{-1}(x))} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Or, pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{h^{-1}(x)}{h(h^{-1}(x)} = \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$ car h^{-1} est la réciproque de h.

On a donc montré : $\dfrac{h^{-1}(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.