Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°2 : Généralités sur les fonctions réelles

2023-2024
Mathématiques

Pour commencer

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(a) $x \longmapsto \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

(b) $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x-1-\frac{1}{x-1}}$

(c) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$

(d) $x \longmapsto \sqrt{x^2-x-2}$

(e) $x \longmapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}}$

(f) $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles.

(a) Montrer que si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que si f et g sont croissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que si f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f+g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que si f et g sont décroissantes et positives sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(a) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la valeur de ce minimum.

(b) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Calculer $f(x)+1$ et $f(x)-1$ pour tout réel x, puis en déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, \ln(1+t) \leq t$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b}$. Montrer que f est admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur de ce minimum. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 7 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^x}$ n'est ni paire ni impaire.

Exercice 8 *Parité, imparité : on parle des "propriétés de symétrie".* Étudier les propriétés de symétrie de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 9 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire. Étudier les propriétés de symétrie des fonctions $x \longmapsto xf(x)$ et $x \longmapsto x^2 f(x)$.

Exercice 11 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

(a) $x \longmapsto e^{x\ln x}$

(b) $x \longmapsto e^{-\dfrac{x^2}{2}}$

(c) $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$

(d) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

(e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(f) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Exercice 12

(*a*) Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$ à l'aide d'une étude de variations.

(*b*) En déduire que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent à* $-\dfrac{x}{1+x}$.

Exercice 13 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 14 On considère les fonctions f et g définies par les formules $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Déterminer les domaines de définition $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g, \mathcal{D}_{g\circ f}$ de f, g et $g \circ f$ et calculer $g \circ f$. Que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 15 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

(*a*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$

(*b*) $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = x - 1$

(*c*) $f(x) = 8x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

(*d*) $f(x) = \ln(e^x + 1)$ et $g(x) = \ln(e^x - 1)$

Exercice 16 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

(*a*) Montrer que si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.

(*b*) Montrer que si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.

(*c*) Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 17 On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \left(x^2-1\right)\sqrt{4-x^2}$.

(*a*) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

(*b*) Étudier les éventuelles propriétés de symétrie de f.

(*c*) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'$.

(*d*) En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$ et montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

Pour continuer

Exercice 18 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

(*a*) $x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}$

(*b*) $x \longmapsto \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(*c*) $x \longmapsto \ln(1-x) + \ln(1+x)$

(*d*) $x \longmapsto \ln\left(x^2+x-12\right)$

Exercice 19 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{-x\ln x}$ est bornée sur son domaine. On pourra utiliser un tableau de variation.

Exercice 20 Montrer que la fonction définie par la formule $f(x) = e^{\dfrac{\ln x}{x}}$ est bornée sur son domaine.

Exercice 21 *Important.* Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que $f + g$ et $f \times g$ sont bornées.

Exercice 22 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = 1$.

Étudier les propriétés de symétrie de la fonction g définie par la formule $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 23 Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à l'origine et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(*a*) Montrer qu'il existe une unique fonction $p : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction $i : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que p est paire, i est impaire et $f = p + i$.

(*b*) Déterminer explicitement p et i dans le cas où f est définie sur $]-1,1[$ par la formule $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$. Étudier les propriétés de symétrie de f et g.

Exercice 25 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous (on précisera les domaines de définition et de dérivabilité).

(a) $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

(b) $x \longmapsto \ln(1 + e^{-x})$

(c) $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(d) $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

(e) $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(f) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 1}$

Exercice 26

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ à l'aide d'une étude de variations.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \leq 1 + xe^x$. *Indication : on pourra appliquer le résultat précédent.*

Exercice 27 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ à l'aide d'une étude de variations.

Exercice 28 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$ et écrire la formule donnant cette fonction. Même consigne pour la fonction composée $f \circ g$.

(a) $f(x) = \frac{x+2}{1+2x}$ et $g(x) = \frac{x-2}{1-2x}$

(b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$ et $g(x) = \frac{3x+5}{2-x}$

(d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = \ln(x)$