Chapitre 14 :Théorie des graphes

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Généralités sur les graphes

On attribue généralement la première étude de la notion de graphe à Leonhard Euler, lors d'un article rédigé en 1736 dans lequel il se demandait par exemple s'il était possible de visiter la ville de Königsberg en empruntant exactement une fois chacun de ses ponts.

Un graphe est la donné de sommets reliés par des arêtes. Ils permettent de représenter de nombreuses situations. Ils peuvent être orientés ou non, pondérés ou non. Exemples : à noter.

1. Notion de graphe non orienté

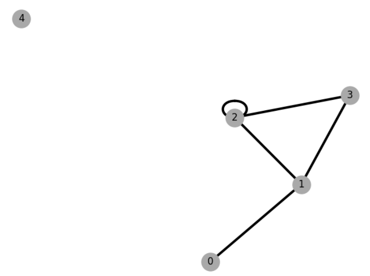
Définition 1. On appelle graphe non orienté la donnée d'un couple $\mathcal{G} = (S, A)$ où :

(*i*) S est un ensemble fini appelé ensemble des sommets du graphe $\mathcal{G}$. les éléments de S sont appelés les sommets de $\mathcal{G}$,

(*ii*) A est un ensemble de parties de S, toutes de cardinal 1 ou 2, appelé ensemble des arêtes de $\mathcal{G}$. Les éléments de A sont appelés les arêtes de $\mathcal{G}$.

Représentation : Un graphe est souvent donné par sa représentation graphique.

Le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous :



est formé de 5 sommets - nommés par les entiers 0, 1, 2, 3 et 4 - et de 5 arêtes. On encode mathématiquement ce graphe en posant $\mathcal{G} = (S, A)$ où

(*i*) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

(*ii*) $A = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$.

On désignera ainsi par $\{0, 1\}$ l'arête reliant les sommets 0 et 1. On remarque une arête d'un type particulier : l'arête $\{2\}$, qui relie le sommet 2 à lui-même (on parle de boucle). Ainsi, dans la définition ci-dessus, lorsqu'on dit que les parties de S éléments de A sont de cardinal 1 ou 2, c'est qu'on autorise ces arêtes à être des boucles.

Définition 2. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté.

(i) On dit que deux sommets $s \in S$ et $s' \in S$ de $\mathcal{G}$ sont *adjacents* (ou voisins) si $\{s, s'\} \in A$ (autrement dit, si $\{s, s'\}$ est une arête de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire si s et s' sont reliés par une arête de $\mathcal{G}$).

(ii) On dit qu'un sommet $s \in S$ est *isolé* s'il n'est adjacent à aucun autre sommet de S (un sommet n'étant adjacent qu'à lui-même est considéré isolé).

(iii) On appelle *boucle* de $\mathcal{G}$ tout arête de $\mathcal{G}$ de la forme $\{s\}$, où $s \in S$.

(iv) On dit que $\mathcal{G}$ est un graphe *simple* s'il n'admet aucune boucle.

(v) On appelle *ordre* du graphe $\mathcal{G}$ le nombre $\mathrm{Card}(S)$ de ses sommets.

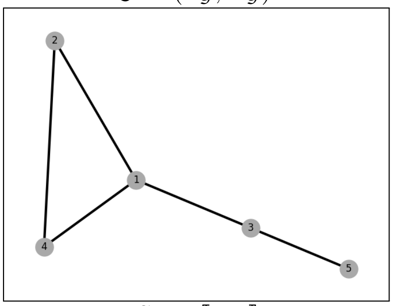
(vi) Soit $a \in A$ une arête de $\mathcal{G}$. On appelle *extrémités* de a les deux sommets s et s' de $\mathcal{G}$ tels que $a = \{s, s'\}$. Si a est une boucle $\{s\}$, ses deux extrémités sont le sommet s.

(vii) On appelle *degré* d'un sommet le nombre de fois qu'il est l'extrémité d'une arête (les boucles sont comptées deux fois).

Remarque. On considère parfois des graphes pouvant contenir des *multi-arêtes* : ce sont des graphes pour lesquels deux mêmes sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes. Dans ce cas, un graphe est dit simple s'il n'a aucune boucle et si deux sommets sont reliés par au plus une arête.

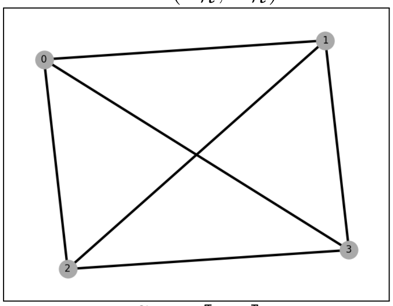
Exemple 3. Considérons les graphes non orientés $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ représentés ci-dessous.

$\mathcal{G} = (S_\mathcal{G}, A_\mathcal{G})$



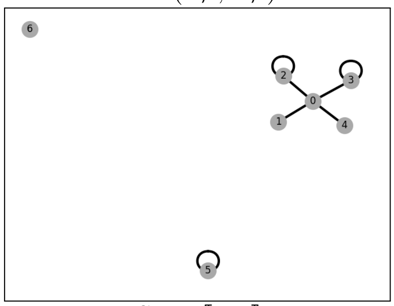
$S_\mathcal{G} = [\![1, 5]\!]$
$A_\mathcal{G} = \dots$

$\mathcal{H} = (S_\mathcal{H}, A_\mathcal{H})$



$S_\mathcal{H} = [\![0, 3]\!]$
$A_\mathcal{H} = \dots$

$\mathcal{P} = (S_\mathcal{P}, A_\mathcal{P})$



$S_\mathcal{P} = [\![0, 6]\!]$
$A_\mathcal{P} = \dots$

Alors :

(i) Regardons le graphe $\mathcal{G}$. Les sommets 3 et 5 sont adjacents. Les sommets 1 et 5 ne sont pas adjacents, le sommets 5 et 4 non plus. Le graphe $\mathcal{G}$ est simple, il n'a aucune boucle. Enfin, $\mathcal{G}$ n'a aucun sommet isolé.

Ce graphe est d'ordre 5. Le sommet 1 est de degré 3, le sommet 5 est de degré 1. Les extrémités de l'arête $\{1, 3\}$ sont les sommets 1 et 3.

(ii) Regardons $\mathcal{H}$. On peut remarquer que pour tous sommets s et s' distincts de $\mathcal{H}$, s et s' sont adjacents. On dira que le graphe $\mathcal{H}$ est complet (voir plus loin). Ce graphe est simple et n'a pas de sommet isolé.

$\mathcal{H}$ est d'ordre 4, et tous les sommets de $\mathcal{H}$ sont de degré 3.

(iii) Regardons $\mathcal{P}$. Les sommets 5 et 6 sont isolés. De plus, ce graphe a 3 boucles : $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{5\}$. Ce n'est donc pas un graphe simple. Les sommets 0 et 2 sont adjacents, mais les sommets 3 et 4 ne le sont pas.

Ce graphe $\mathcal{P}$ est d'ordre 7, les deux extrémités de l'arête $\{5\}$ sont le sommet 5. Les sommets 2 et 3 sont tous les deux de degré 3.

2. Le lemme des poignées de mains (cas non orienté)

Théorème 4. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Notons n l'ordre de $\mathcal{G}$, $s_1, \dots, s_n$ ses sommets de degrés respectifs $d_1, \dots d_n$. Soit enfin $p = \text{Card}(A)$ le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$. Alors :*

$$2p = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Autrement dit, la somme des degrés des sommets de $\mathcal{G}$ est égale au double de son nombre d'arêtes.

Démonstration. Chaque arête de $\mathcal{G}$ compte deux extrémités, il y a donc au total $2p$ extrémités des arêtes de $\mathcal{G}$. D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le sommet s_i est compté exactement d_i fois comme l'extrémité d'une arête, par définition du degré d'un sommet. Il y a donc $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ extrémités des arêtes de $\mathcal{G}$. Cela prouve bien :

$$2p = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

□

Remarque. En particulier, la somme des degrés des sommets d'un graphe (non orienté) est un entier pair.

Exercice 5. Est-il possible, dans une assemblée de 15 personnes, que chaque personne connaisse exactement 5 autres personnes?

Exercice 6. (TD) On considère un groupe de $n \in \mathbb{N}^*$ personnes se réunissant pour une conférence. On suppose que chaque personne salue chaque autre personne par une poignée de mains. Combien de poignées de mains ont-elles été échangées?

Une conséquence :

Proposition 7. *Tout graphe non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.*

Démonstration. À noter. □

3. Chaînes d'un graphe non orienté, connexité

Définition 8. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté. Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle *chaîne de longueur* k du graphe $\mathcal{G}$ la donnée d'une suite finie $(s_1, s_2, \dots, s_{k+1}) \in S^{k+1}$ de sommets de $\mathcal{G}$ dont les sommets consécutifs sont adjacents :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \{s_i, s_{i+1}\} \in A.$$

Dans ce cas, les sommets s_1 et s_{k+1} sont appelés les extrémités de cette chaîne. On dit aussi que cette chaîne va du sommet s_1 au sommet s_{k+1}.
Autrement dit, une chaîne d'un graphe $\mathcal{G}$ est la donnée d'une suite de sommets consécutivement reliés par une arête, et la longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

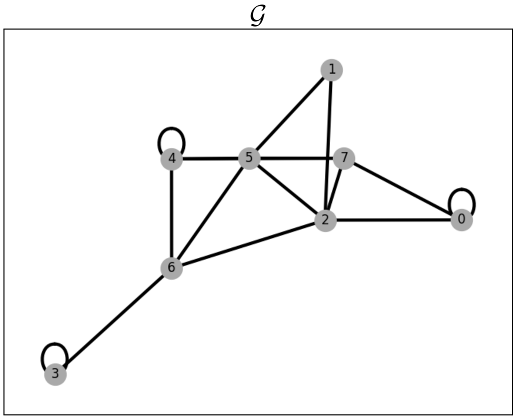
Définition 9. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté.

(*i*) On dit que deux sommets donnés de $\mathcal{G}$ sont *reliés par une chaîne* s'il existe une chaîne de $\mathcal{G}$ passant par ces sommets.

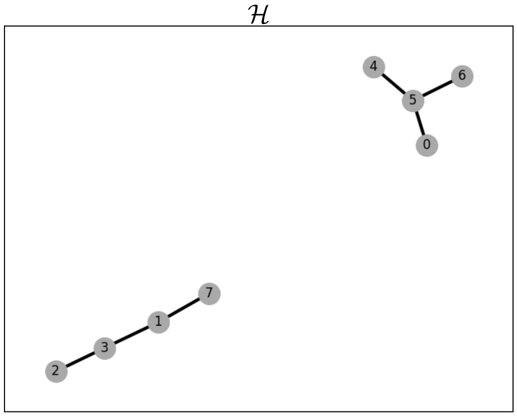
(*ii*) On dit que le graphe $\mathcal{G}$ est *connexe* si pour tous sommets s et s' de $\mathcal{G}$, s et s' sont reliés par une chaîne.

Exemple 10. Considérons les graphes non orientés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ représentés ci-dessous.

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$



(*i*) $(0, 2, 7, 0, 0, 2, 5)$ est une chaîne de $\mathcal{G}$, de longueur 6. On décrit souvent une chaîne sous la forme :

$$0 - 2 - 7 - 0 - 0 - 2 - 5$$

où les arêtes sont "rendues plus visibles". Cette chaîne est une chaîne de 0 vers 5.

Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe. Par exemple, les sommets 1 et 6 sont reliés par une chaîne, comme par exemple :

$$1 - 5 - 6 - 3 - 3.$$

(*ii*) Le graphe $\mathcal{H}$ n'est pas connexe, car les sommets 1 et 4 ne sont pas reliés par une chaîne. Deux chaîne des $\mathcal{H}$ sont données par :

$$0 - 5 - 4 - 5 - 6 \text{ et } 1 - 7 - 1 - 3 - 2 - 3.$$

La première est de longueur 4, la seconde de longueur 5.

Par contre, $0 - 5 - 6 - 0$ n'est pas une chaîne de $\mathcal{H}$ car $\{6, 0\}$ (qu'on peut aussi noter $6 - 0$) n'est pas une arête de $\mathcal{H}$.

Remarque. Vu la définition, une chaîne de longueur 0 d'un graphe est tout simplement donnée par un sommet de ce graphe. Tout sommet est alors relié à lui-même par une chaîne : celle de longueur 0 qu'il défini.

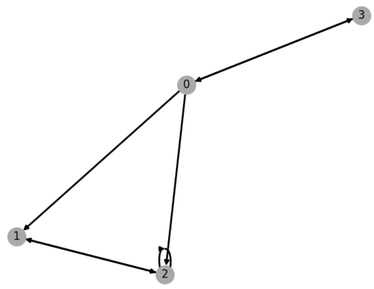
4. Notion de graphe orienté

Définition 11. On appelle *graphe orienté* la donnée $\mathcal{G} = (S, A)$ d'un couple d'ensembles, où :

(i) S est un ensemble fini, appelé ensemble des sommets de $\mathcal{G}$. On appelle sommet de $\mathcal{G}$ tout élément de S.

(ii) A est une partie de S^2, appelé ensemble des arêtes (orientées) de $\mathcal{G}$. Les éléments de A sont appelés les arêtes de $\mathcal{G}$.

Exemple 12. Les graphes orientés sont souvent donnés par une représentation graphique. Par exemple, le graphe orienté $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous :



est donné par $\mathcal{G} = (S, A)$ où:

(i) $S = \dots$

(ii) $A = \dots$

Ainsi, l'orientation des arêtes est encodée par le fait qu'une arête est la donnée d'un couple, et non d'un ensemble. L'arête partant du sommet 0 et allant au sommet 1 est encodée par le couple $(0, 1)$, l'arête partant de 0 et allant vers 3 est $(0, 3)$, l'arête allant dans l'autre sens est $(3, 0)$.

Dans la représentation graphique ci-dessus, il y a **deux** arêtes entre 0 et 3 (une dans chaque sens), représentées comme une arête avec des flèches des deux côtés.

Définition 13. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté.

(i) On appelle *ordre* de $\mathcal{G}$ le nombre $\mathrm{Card}(S)$ de ses sommets.

(ii) On appelle *boucle* de $\mathcal{G}$ toute arête de la forme (s, s), où $s \in S$.

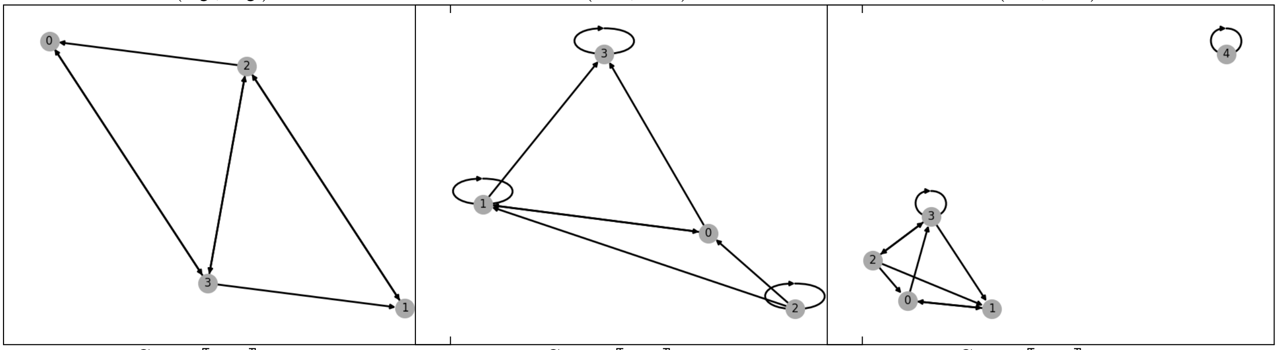
(iii) On dit que le graphe $\mathcal{G}$ est *simple* s'il n'a aucune boucle.

(iv) Soit $a \in A$ une arête de $\mathcal{G}$, soient s_1, s_2 les sommets de $\mathcal{G}$ tels que $a = (s_1, s_2)$. On dit que s_1 est l'origine (ou l'extrémité initiale, ou sortante) de l'arête a, et que s_2 est son but (ou son extrémité finale, ou entrante). On dit aussi que l'arête a va du sommet s_1 vers le sommet s_2.

(v) Soit s un sommet de $\mathcal{G}$. On appelle *degré sortant* de s l'entier noté $d^+(s)$ donné par le nombre d'arêtes dont s est l'origine. On appelle *degré entrant* de s l'entier noté $d^-(s)$ donné par le nombre d'arêtes dont s est le but. On appelle *degré total* de s l'entier $d(s) = d^+(s) + d^-(s)$.

Exemple 14. Considérons les graphes orientés $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ représentés ci-dessous.

$\mathcal{G} = (S_\mathcal{G}, A_\mathcal{G})$ $\quad$ $\mathcal{H} = (S_\mathcal{H}, A_\mathcal{H})$ $\quad$ $\mathcal{P} = (S_\mathcal{P}, A_\mathcal{P})$



$S_\mathcal{G} = [\![0, 3]\!]$ $\quad$ $S_\mathcal{H} = [\![0, 3]\!]$ $\quad$ $S_\mathcal{P} = [\![0, 4]\!]$

$A_\mathcal{G} = \dots$ $\quad$ $A_\mathcal{H} = \dots$ $\quad$ $A_\mathcal{P} = \dots$

Alors :

(i) Regardons le graphe orienté $\mathcal{G}$. Il est d'ordre 4, et ne contient aucune boucle : c'est un graphe simple. L'arête $(2, 0)$ a le sommet 2 comme origine, et le sommet 0 comme but. Il y a deux arêtes d'extrémités 0 et 3 : les arêtes $(3, 0)$ et $(0, 3)$. Le sommet 3 est de degré entrant $d^-(3) = 2$, de degré sortant $d^+(3) = 3$, et de degré total 5.

(ii) Regardons le graphe orienté $\mathcal{H}$. Il est d'ordre 4, et n'est pas simple (il a trois boucles : $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$). Le sommet 3 est l'extrémité initiale d'une seule arête (l'arête $(3, 3)$), et l'extrémité finale de 3 arêtes (les arêtes $(1, 3)$, $(0, 3)$ et $(3, 3)$). Il est donc de degré entrant 3 et de degré sortant 1.

(iii) Le graphe $\mathcal{P}$, d'ordre 5, n'est pas simple. Le sommet 4 est de degré total 2 (car de degrés entrant et sortant 1).

Proposition 15. (Lemme des poignées de mains pour les graphes orientés) *Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté, notons n son ordre et $s_1, \dots, s_n$ ses sommets. Soit p le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(s_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(s_i) = p$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} d(s_i) = 2p.$$

Démonstration. Chacune des p arêtes de $\mathcal{G}$ compte exactement une extrémité initiale (resp. une extrémité finale), donc il y a exactement p extrémités initiales (resp. finales) des arêtes de $\mathcal{G}$. Chaque sommet s_i ($1 \leq i \leq n$) est l'extrémité initiale (resp. finale) d'exactement $d^+(s_i)$ arête (resp. $d^-(s_i)$ arêtes) donc ce nombre total d'extrémités initiales (resp. finales) est de $\sum_{i=1}^{n} d^+(s_i)$ (resp. $\sum_{i=1}^{n} d^-(s_i)$). Cela montre la première formule. La seconde formule s'obtient en sommant les deux égalités ainsi obtenues. $\square$

5. Chemins et connexité d'un graphe orienté

Pour les graphes orientés, il y a beaucoup de variations des notions de chaînes et de connexité vues pour les graphes non orientés. On ne parle plus de chaîne, mais de chemins : les arêtes doivent êtres parcourues "dans leur sens", et la notion de connexité au programme est celle dite de "forte" connexité. Les variations mentionnés viennent du fait qu'on pourrait aussi ignorer l'orientation des arêtes (ce qu'on ne fait pas ici).

Si ces subtilités doivent être mentionnées, on utilisera le terme indiqué en parenthèse.

Définition 16. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté.

(*i*) Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle *chemin* (orienté) de longueur k la donnée $(s_1, s_2, \ldots, s_{k+1})$ d'un $(k+1)$-uplet d'arêtes de $\mathcal{G}$ tel que :
$$\forall i \in [\![1, k]\!], (s_i, s_{i+1}) \in A.$$
On peut représenter un tel chemin sous la forme suivante :
$$s_1 \to s_2 \to \ldots \to s_k \to s_{k+1}.$$

(*ii*) Soient s et s' deux sommets de $\mathcal{G}$. On appelle chemin de s vers s' tout chemin de la forme
$$s = s_1 \to s_2 \to \ldots \to s_k \to s_{k+1} = s'$$
pour un certain entier naturel k.

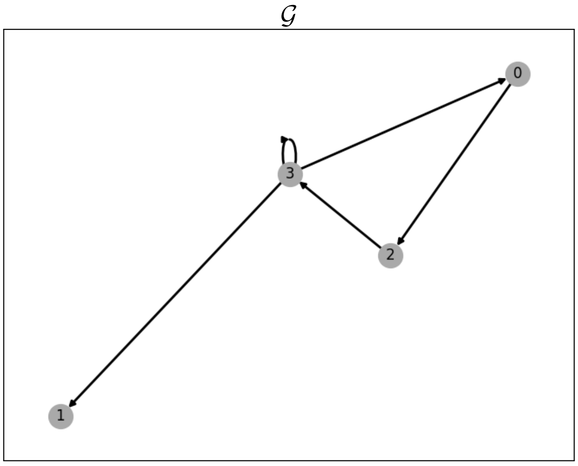
(*iii*) On dit que $\mathcal{G}$ est (fortement) *connexe* si pour tous sommets s et s' de $\mathcal{G}$, il existe un chemin de s vers s'.

Remarque. Attention : dans toutes ces définitions, l'orientation des arêtes compte et l'ordre des sommets compte.

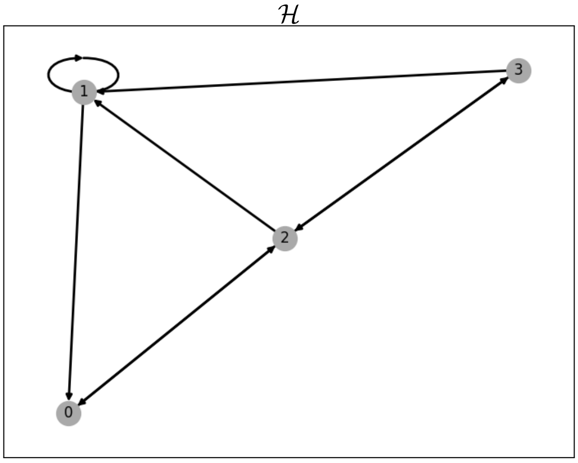
Remarque. Un chemin de longueur 0 est donc la donnée d'un sommet, et un chemin de longueur 1 est donné par une arête. Plus généralement, la longueur d'un chemin est donc le nombre de fois qu'il "parcourt" une arête.

Exemple 17. Considérons les graphes orientés $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ représentés ci-dessous.

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$



(*i*) Considérons le graphe $\mathcal{G}$. $2 \to 3 \to 3 \to 1$ est un chemin de longueur 3 du graphe $\mathcal{G}$, du sommet 2 vers le sommet 1. En particulier, les boucles comptent dans la longueur d'un chemin. De même :
$$2 \to 3 \to 0 \to 2 \to 3 \to 3$$
est un autre chemin du sommet 2 vers le sommet 3, de longueur 5.

Dans ce même graphe, il n'existe pas de chemin du sommet 1 vers le sommet 3, car aucune arête ne part du sommet 1. Par conséquent, ce graphe n'est pas connexe.

(*ii*) Dans le graphe $\mathcal{H}$,
$$1 \to 0 \to 2 \to 3$$
est un chemin de longueur 3 du sommet 1 vers le sommet 3. On peut vérifier que ce graphe est connexe : pour tout choix de sommets i et j, il existe un chemin du sommet i vers le sommet j. Il y a tout de même $4 \times 3 = 12$ vérifications à faire si on veut lister toutes les possibilités.

II. Matrice d'adjacence et connexité

1. Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 18. (*i*) Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté. Notons n l'ordre de $\mathcal{G}$, et choisissons une numérotations $s_1, \ldots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$.
On appelle *matrice d'adjacence* de $\mathcal{G}$ (associée à cette numérotation) la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{s_i, s_j\} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

(*ii*) Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté. Notons n l'ordre de $\mathcal{G}$, et choisissons une numérotations $s_1, \ldots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$.
On appelle *matrice d'adjacence* de $\mathcal{G}$ (associée à cette numérotation) la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

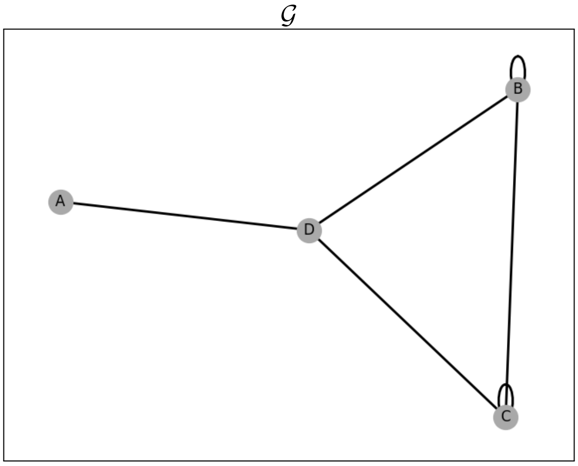
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (s_i, s_j) \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarque. Pour pouvoir considérer la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non), il faut donc choisir une numérotation de ses sommets. Par conséquent, un graphe n'a pas "une" matrice d'adjacence, mais "des" matrices d'adjacence. Cependant, on fait souvent l'abus de langage de parler de "la" matrice d'adjacence d'un graphe, ce qui est légitime uniquement une fois une numérotation des sommets fixée.

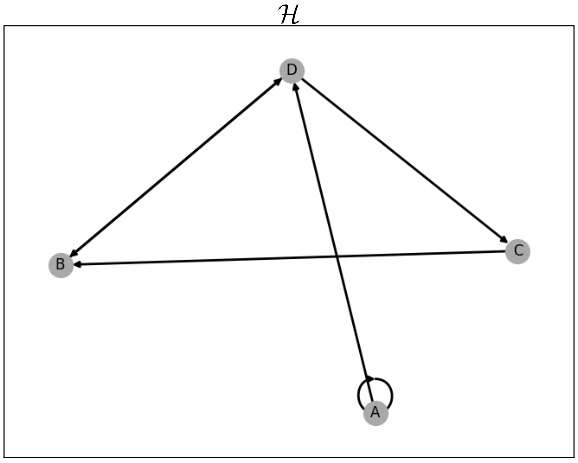
Lorsque les sommets d'un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sont les entiers numérotés de 1 à n, on se permet de considérer qu'ils sont naturellement numérotés.

Exemple 19. Considérons les graphes (orientés ou non) ci-dessous.

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$



(*i*) On numérote les sommets A, B, C, D de $\mathcal{G}$, non orienté, dans l'ordre alphabétique (A est le sommet 1, B le sommet 2, etc.). La matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ obtenue est :

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(*ii*) On numérote les sommets A, B, C, D de $\mathcal{H}$, orienté, dans l'ordre alphabétique (A est le sommet 1, B le sommet 2, etc.). La matrice d'adjacence de $\mathcal{H}$ obtenue est :

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Remarque. Les coefficients diagonaux valant 1 de la matrice d'adjacence d'un graphe (à sommets numérotés) donnent les boucles de ce graphe.

On peut faire quelques observations simples sur la matrice d'adjacence.

Proposition 20. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Alors, pour toute numérotation choisie des sommets de $\mathcal{G}$, la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ est symétrique.*

Démonstration. Soit n l'ordre de $\mathcal{G}$ (un graphe non orienté). Supposons fixée une numérotation $s_1, \dots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$, et soit M la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ ainsi obtenue.

Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{s_i, s_j\} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{s_j, s_i\} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = m_{j,i}$. Donc M est symétrique. $\square$

Proposition 21. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté dont les sommets sont numérotés $s_1, \dots s_n$ (où n est l'ordre de $\mathcal{G}$). Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice d'adjacence. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:*

$$d^+(s_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

$$d^-(s_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}.$$

Démonstration. Écriture en exercice. Avec les notations de l'énoncé $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ est une somme de termes valant 0 ou 1, avec exactement un terme 1 par arête partant de s_i, donc compte bien le degré sortant de s_i. $\square$

Remarque. Cas non orienté : Attention, la proposition analogue est fausse pour les graphes non orientés ! Il faudrait l'adapter pour prendre en compte que les boucles comptent pour deux dans le degré. On peut tout de même dire ceci :

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté simple dont les sommets sont numérotés $s_1, \dots s_n$ (où n est l'ordre de $\mathcal{G}$). Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice d'adjacence. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$d(s_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}.$$

2. Matrice d'adjacence, chaînes et chemins

Le calcul des puissances de "la" matrice d'adjacence d'un graphe non orienté permet de compter ses chaînes.

Proposition 22. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Notons n son ordre et supposons fixée une numérotation $s_1, \dots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$. Notons M la matrice d'adjacence ainsi obtenue.*
Alors, pour tout entier naturel k, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^k est le nombre de chaînes de longueur k de $\mathcal{G}$ du sommet s_i vers le sommet s_j.

On a de même une version "graphe orienté".

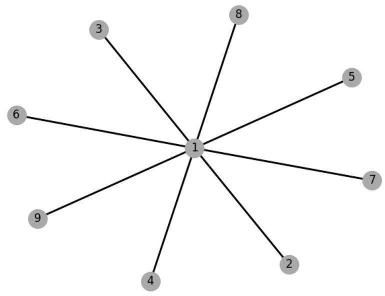
Proposition 23. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté. Notons n son ordre et supposons fixée une numérotation $s_1, \dots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$. Notons M la matrice d'adjacence ainsi obtenue.*
Alors, pour tout entier naturel k, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^k est le nombre de chemins de longueur k de $\mathcal{G}$ de s_i vers s_j.

Remarque. Ces énoncés se vérifie facilement dans le cas $k = 0$ et $k = 1$: pour le cas $k = 0$, un chemin ou une chaîne de longueur 0 ne parcourt pas d'arêtes, et consiste donc en la donnée d'un sommet, ce qui est bien résumé par la matrice $M^0 = I_n$ (il y a un chemin - ou une chaîne- de s_i vers s_j de longueur 0 si et seulement si $s_i = s_j$, et aucun sinon).

Pour $k = 1$, un chemin (ou une chaîne) de longueur 1 se résume à la donnée d'une arête, ce qui est bien l'information contenue dans $M^1 = M$.

Démonstration. Dans le cas orienté : à noter. □

Exercice 24. Considérons le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous.



(i) Donner la matrice d'adjacence A de $\mathcal{G}$.

(ii) Montrer que $A^3 = 8A$.

(iii) En déduire que pour tout entier $p \geq 1$, $A^{2p} = 8^{p-1}A^2$. Puis, déterminer A^{2p+1} pour tout entier naturel p.

(iv) Montrer que tout chemin de longueur paire partant du sommet 1 arrive au sommet 1.

(v) Quel est le nombre de chaînes de longueur 8 du sommet 2 vers le sommet 3?

3. Connexité et matrice d'adjacence

Voici une conséquence très pratique de la partie précédente, et le théorème le plus important du chapitre. Nous l'utiliserons beaucoup en python.

Théorème 25. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté dont les sommets sont numérotés. Notons n son ordre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ ainsi obtenue. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $\mathcal{G}$ est connexe, et

(ii) La matrice $I_n + M + M^2 + \ldots + M^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

Et sa version "graphe orienté" :

Théorème 26. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté dont les sommets sont numérotés. Notons n son ordre. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ ainsi obtenue. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $\mathcal{G}$ est connexe, et

(ii) La matrice $I_n + M + M^2 + \ldots + M^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

Démonstration. Version orientée : à noter. □

III. Quelques notions supplémentaires sur les graphes

1. Graphes et démonstrations par récurrence

Idée : On peut souvent démontrer des résultats par récurrence (forte) en théorie des graphes. La récurrence peut porter sur le nombre de sommets du graphe, son nombre d'arête, ou sur la somme des deux. Moralement, on s'imagine construire tout graphe en ajoutant un à un ses sommets et ses arêtes à partir du graphe vide, et on démontre qu'a chaque ajout, la propriété voulue est vérifiée.

Prenons par exemple le problème de concours blanc ci-dessous.

Exercice 27. *Tous les graphes considérés dans cet exercice seront* **simples** *et* **non-orientés** *(et on appellera donc* **graphe** *tout graphe simple non-orienté).*

On rappelle qu'un cycle d'un graphe est un chemin de ce graphe dont les deux extrémités sont égales.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe, on appelle **triangle de** $\mathcal{G}$ *tout cycle de longueur 3 de $\mathcal{G}$. Un graphe ne comportant pas de triangles est dit sans triangles.*

Dans ce problème, on démontre le théorème ci-dessous et on s'intéresse brièvement au cas d'égalité :

Theorème 1 : *Le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangles d'ordre n est $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.*

[...] Partie 2

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1. Pour cela, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mathcal{H}(n)$: "Tout graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n sans triangles admet au plus $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arêtes"

et on va démontrer "$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}(n)$" par récurrence forte.

Pour tout graphe $\mathcal{G}$, on notera $a(\mathcal{G})$ le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$.

(i) Démontrer $\mathcal{H}(1)$ et $\mathcal{H}(2)$.

(ii) Démontrer $\mathcal{H}(3)$.

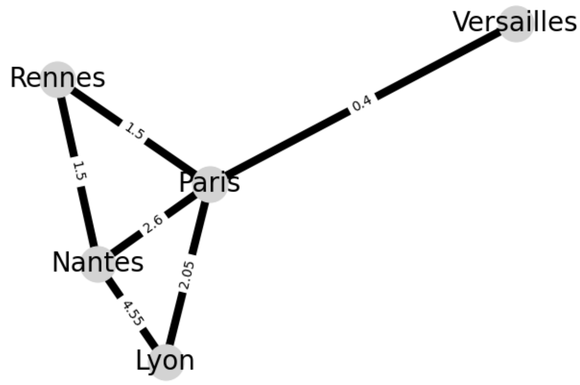
(iii) Soit $n \geq 4$. On suppose, pour l'hérédité traitée dans ces sous questions, que $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et on cherche à démontrer $\mathcal{H}(n)$. On considère donc un graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n sans triangles, et on veut démontrer que $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Pour tout sommet s de $\mathcal{G}$, on notera $d(s)$ le degré de s.

- *(a) Que dire si $\mathcal{G}$ n'a aucune arête?*
- *(b) On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{G}$ a au moins une arête, et soit $\{u, v\}$ une arête de $\mathcal{G}$. Les sommets u et v peuvent-ils être adjacent à un même sommet?*
- *(c) En déduire que $d(u) + d(v) \leq n$.*
- *(d) Soit $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu à partir de $\mathcal{G}$ en supprimant les sommets u et v ainsi que toutes les arêtes qui leurs sont reliés. En déduire que $a(\mathcal{G}) \leq a(\mathcal{G}') + n - 1$.*
- *(e) Montrer que $a(\mathcal{G}') \leq \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$.*
- *(f) En déduire $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ et conclure la démonstration.*

[...]

2. Graphes (orientés ou non) pondérés

L'idée est d'attribuer un nombre réel (appelé poids) à chaque arête d'un graphe. Cela est naturel dans de nombreuses situations. Par exemple, on peut vouloir considérer le graphe non orienté pondéré suivant, les nombres indiqués étant les temps de transport en heures, en train, d'une ville à l'autre.



Il s'agit ici surtout de comprendre comment on modélise cela mathématiquement.

Cette attribution est modélisée mathématiquement par une application de l'ensemble A des arêtes vers $\mathbb{R}$. Par exemple, dans le graphe ci dessous, la pondération $p : A \to \mathbb{R}$ considérée sur le graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ des villes mentionnées, reliées si elles ont une ligne directe de train, vérifie :

$$p(\{Paris, Lyon\}) = 2,05.$$

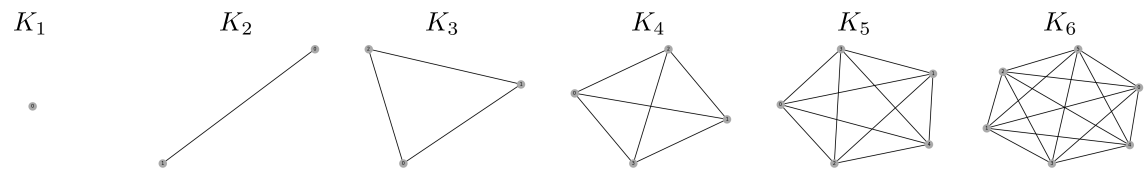
Définition 28. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe (orienté ou non). On appelle pondération sur $\mathcal{G}$ toute application $p : A \to \mathbb{R}$.
On appelle graphe orienté (resp. non orienté) pondéré la donnée $(\mathcal{G}, p)$ d'un graphe $\mathcal{G}$ orienté (resp. non orienté) et d'une pondération p sur $\mathcal{G}$.

Nous reparlerons beaucoup des graphes pondérés en Python, à travers l'algorithme de Dijsktra permettant de trouver une chaîne (ou un chemin) de poids minimal entre deux points (c'est à dire, dont la somme des poids des arêtes est minimale).

3. Graphe complet

Définition 29. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On appelle *graphe complet* d'ordre n tout graphe non orienté simple tel que pour tous sommets s et s' distincts, s et s' sont adjacents.

Exemple 30. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Il y a en fait un unique graphe complet d'ordre n au choix près des sommets. En choisissant comme ensemble de sommets l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$, on obtient le graphe communément noté K_n dont les premières représentations sont ci-dessous.



Exercice 31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K_n le graphe complet d'ordre n de sommets $1, 2, \ldots, n$.

(i) Quel est le nombre total d'arêtes de K_n ?

(ii) Donner la matrice d'adjacence M de K_n.

(iii) Donner une matrice J telle que $M = J - I_n$.

(iv) En déduire le calcul de M^p, pour tout entier naturel p.

(v) Donner le nombre de chaînes de longueur p de i vers j dans K_n, en fonction de i et j.

4. Graphes eulériens

Définition 32. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté.

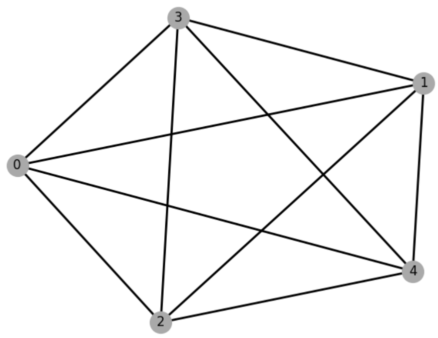
(i) Une chaîne de $\mathcal{G}$ est dite *fermée* si ses deux extrémités sont égales.

(ii) On appelle *cycle* de $\mathcal{G}$ toute chaîne fermée de $\mathcal{G}$ ne passant pas deux fois par la même arête.

(iii) On dit qu'un cycle de $\mathcal{G}$ est *eulérien* s'il passe exactement une fois par chaque arête de $\mathcal{G}$.

(iv) On dit que le graphe $\mathcal{G}$ est *eulérien* s'il existe un cycle eulérien de $\mathcal{G}$.

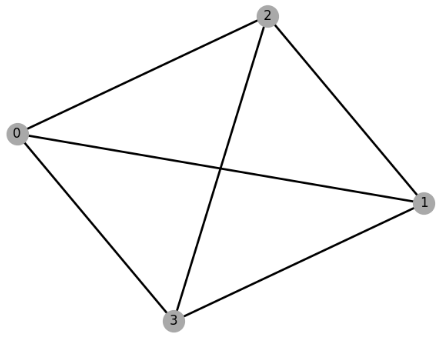
Exemple 33. Comme vous le savez peut être depuis votre enfance, le graphe K_5 est eulérien.



Un cycle eulérien est par exemple :

$$0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 0 - 3 - 1 - 4 - 2 - 0.$$

Par contre, K_4 n'est pas eulérien.



On peut le démontrer de la manière suivante, par l'absurde. Supposons K_4 eulérien. Soit c un cycle eulérien de K_4. Sans perte de généralité, on peut supposer que c est d'extrémité 0, car tous les sommets jouent le même rôle.

Dans ce cas, le sommet 1 étant de degré 3, c passe nécessairement au moins deux fois par le sommet 1. c est alors de la forme :

$$0 - \dots - i - 1 - j - \dots - 1 - \dots - 0$$

Ainsi, c parcourrait 4 fois des arêtes ayant 1 pour extrémité, ce qui contredit le caractère eulérien de c (le sommet 1 étant de degré 3, une arête devrait être parcourue deux fois par c). K_4 n'est donc pas eulérien.

On a plus généralement ce théorème, liée au travail d'Euler sur les ponts de Konigsberg.

Théorème 34. *(Euler, admis, "HP" mais culture générale) Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté connexe. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $\mathcal{G}$ est eulérien, et

(ii) tout sommet de $\mathcal{G}$ est de degré pair.

Remarque. L'hypothèse de connexité n'est pas contraignante : si G n'est pas connexe, si deux composantes connexes (définition plus bas) ont une arête, alors il n'est pas eulérien. Sinon, $\mathcal{G}$ s'obtient à partir d'un graphe connexe en ajoutant un nombre fini de sommets isolés sans boucle, et on peut appliquer le théorème à la seule composante connexe de $\mathcal{G}$ ayant une arête.

Remarque. D'après ce théorème, le graphe complet K_n est eulérien ssi n est impair (tous les sommets de K_n sont de degré $n - 1$). Vous pouvez maintenant essayer de généraliser le tracé enfantin mentionné précédemment à tout graphe complet d'ordre impair.

5. (Thème classique) Graphes bipartis

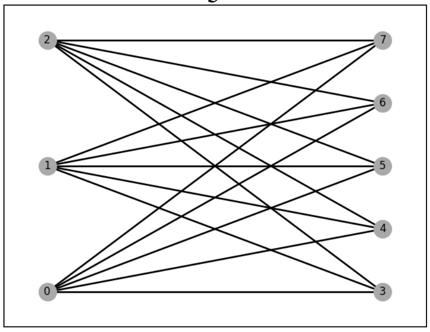
Définition 35. On appelle graphe bipartis tout graphe (orienté ou non) $\mathcal{G} = (S, A)$ tel qu'il existe deux parties G ("gauche") et D ("droite") de S telles que :

(i) $S = G \cup D$, et la réunion est disjointe, et

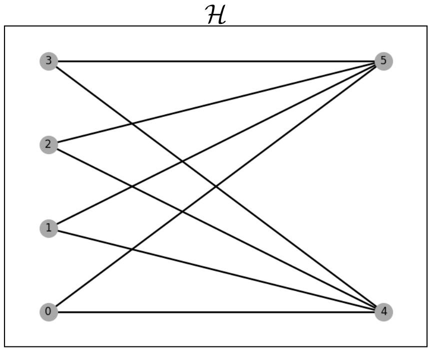
(ii) toute arête de $\mathcal{G}$ relie un sommet de G à un sommet de D.

Exemple 36. Les deux graphes ci-dessous sont visiblement bipartis...

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$

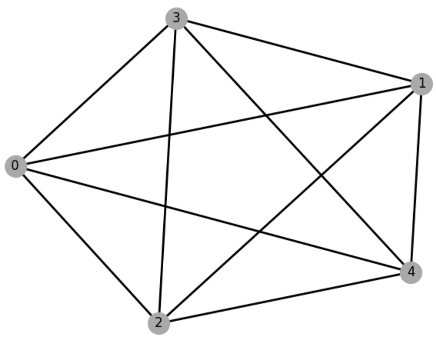


en "posant" :

(i) $G = [\![0, 2]\!]$ et $D = [\![3, 7]\!]$ pour $\mathcal{G}$,

(ii) $G = [\![0, 3]\!]$ et $D = [\![4, 5]\!]$ pour $\mathcal{H}$.

Exemple 37. Toute graphe complet d'ordre au moins 3 n'est pas bipartis. Par exemple, posons $K_5 = (S, A)$.



Supposons par l'absurde donnée une partition $S = G \cup D$ de l'ensemble $S = [\![0, 4]\!]$ comme dans la définition ci-dessus (toute arête relie un élément de G à un élément de D). On peut supposer que $0 \in G$ (les rôles de G et D étant interchangeables). Alors, 0 étant voisin de tout autre sommet, on a nécessairement $D = [\![1, 4]\!]$. C'est absurde, car $\{1, 2\}$ est une arête de K_5 dont les deux extrémités sont éléments de D, contredisant ainsi la définition de la notion de graphe bipartis.

Exercice 38. HEC 2023, difficile Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe simple non orienté.

(i) Montrer que si $\mathcal{G}$ est bipartis, alors la longueur de tout cycle de $\mathcal{G}$ est paire.

(ii) Démontrer la réciproque.

Indications pour la (ii) :

- *Soit s un sommet de $\mathcal{G} = (S, A)$. Poser G l'ensemble des sommets s' de $\mathcal{G}$ tel que : tout chemin de s vers s' est de longueur paire. En particulier, par hypothèse, $s \in G$.*
- *Poser $D = S \setminus G$. La réunion disjointe $S = G \cup D$ est triviale.*
- *Démontrer par l'absurde que toute arête de $\mathcal{G}$ relie un élément de G à un élément de D et conclure.*

6. (Très HP) Composante connexe d'un graphe non orienté

Vous n'aurez à priori des exercice sur cette notion qu'à condition que le sujet la redéfinisse, elle est hors programme. Sans entrer dans les détails techniques, nous faisons ici passer l'idée de ce qu'est une composante connexe d'un graphe.

Définition 39. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté.

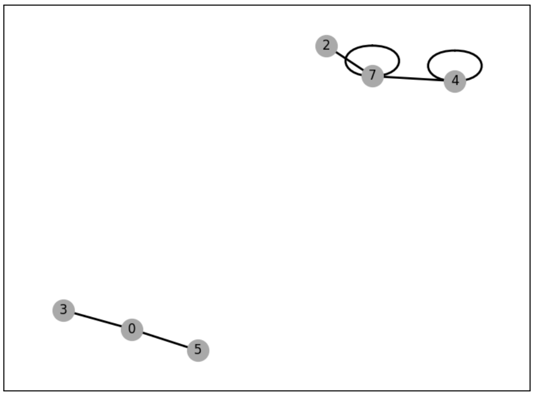
(i) On appelle sous graphe de $\mathcal{G}$ tout graphe de la forme (S', A') où S' est une partie de S. Autrement dit, un sous graphe d'un graphe donné $\mathcal{G}$ est un graphe obtenu en ne gardant que certains sommets et certaines arêtes de $\mathcal{G}$.

(ii) On dit qu'un sous graphe $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ est un sous graphe induit de $\mathcal{G}$ si toute arête de $\mathcal{G}$ entre des sommets de $\mathcal{G}'$ est aussi une arête de $\mathcal{G}'$.

(iii) On appelle composante connexe de $\mathcal{G}$ tout sous graphe induit connexe "maximal" $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ (en le sens suivant : tout graphe induit contenant strictement plus de sommets que ceux de $\mathcal{G}'$ n'est pas connexe).

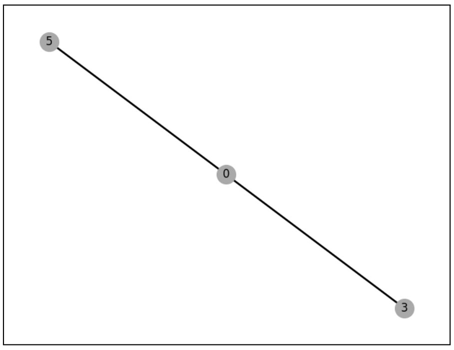
Exemple 40. (i) Si un graphe $\mathcal{G}$ est connexe, alors il n'a qu'une composante connexe : le graphe $\mathcal{G}$.

(ii) Considérons le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.

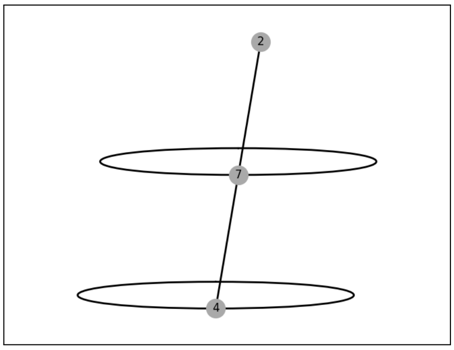


Il admet deux composantes connexes, les graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ ci dessous.

$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$



Les composantes connexes portent bien leur nom, il s'agit des plus grands sous graphes connexes du graphe initial.

IV. Annexe : un problème sur les graphes sans triangles

1. Énoncé

Les questions mathématiques devront être proprement justifiées, avec un raisonnement précis. **Tous** les graphes considérés dans cet exercice seront **simples** et **non-orientés** (et on appellera donc **graphe** tout graphe simple non-orienté).

On rappelle qu'un cycle d'un graphe est un chemin de ce graphe dont les deux extrémités sont égales.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe, on appelle **triangle de** $\mathcal{G}$ tout cycle de longueur 3 de $\mathcal{G}$. Un graphe ne comportant pas de triangles est dit sans triangles.

Dans ce problème, on démontre le théorème ci-dessous et on s'intéresse brièvement au cas d'égalité :

Theorème 1 : *Le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangles d'ordre n est $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.*

Partie 1 : Généralités sur les graphes

(i) Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, dont les sommets sont numérotés de 1 à n.

(a) Rappeler la définition de la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

(b) Soient A la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les coefficients de A^k ?

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{G}$ soit connexe utilisant la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

On s'intéresse aux représentations informatique des graphes. *Pour toutes les questions d'informatiques, on numérote les sommets d'un graphe d'ordre n de 0 à $n-1$.* On peut représenter un graphe par sa matrice d'adjacence, mais aussi en donnant la liste de ses adjacence. Notons $s_0, \dots, s_{n-1}$ les sommets numérotés d'un graphe $\mathcal{G}$. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on appelle liste d'adjacence de s_i toute liste formée des numéros des sommets adjacents à s_i. On appelle liste des adjacences de $\mathcal{G}$ toute liste de la forme

$$[\mathtt{V}(0), \dots, \mathtt{V}(\mathtt{n}-1)]$$

où `V(i)` est une liste d'adjacence de s_i pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

(ii) (a) Donner une représentation graphique du graphe dont les sommets sont les entiers de 0 à 3, et de liste d'adjacence `[[1,2,3],[0],[0,3],[0,2]]`.

(b) Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

(c) Donner l'ensemble S des sommets de ce graphe, et l'ensemble V des arêtes de ce graphe.

(iii) Recopier et compléter le code `Python` suivant d'une fonction prenant en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe (de type `np.ndarray`) et renvoyant une liste des adjacences de ce graphe.

```
import ...
def MatVersListe(A):
        L=[]
        n,p=np.shape(A)
        for i in range(n):
                V=...
                for j in range(n):
                        if ...:
                                V.append(j)
                L.append(V)
        return(L)
```

(iv) Écrire le code d'une fonction `Python` d'entête `def ListeVersMat(L):` prenant en entrée une liste d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$ et renvoyant en sortie sa matrice d'adjacence.

(v) (a) Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$. Quel lien existe-t-il entre A^3 et les triangles de $\mathcal{G}$?

(b) En déduire le code d'une fonction `Python` d'entête `def SansTriangles(A):` prenant en entrée la matrice d'adjacence `A` d'un graphe $\mathcal{G}$, et renvoyant `True` si $\mathcal{G}$ est sans triangles, et `False` sinon.

(vi) On veut écrire une fonction permettant de donner la liste des triangles d'un graphe donné par une liste de ses adjacences. On représentera un triangle passant par les sommets s_i, s_j, et s_k tels que $i < j < k$ par la liste `[i,j,k]`.

(a) Décrire la sortie de la fonction suivante, prenant en entrée :

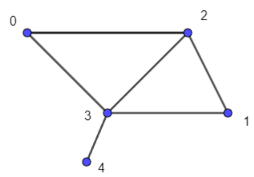
- une liste `L` des adjacences d'un graphe $\mathcal{G}$ (de sommets numérotés de 0 à $n-1$)
- le numéro `k` d'un sommet de $\mathcal{G}$.

```
def NT(L,k):
        V=L[k]
        Rep=[]
        for u in V:
                for v in V:
                        if (v in L[u]) and k<u<v:
                                Rep.append([k,u,v])
        return(Rep)
```

(b) A l'aide de la question précédente, écrire une fonction `Python` d'entête `def ListeTriangles(L):` prenant en entrée une liste `L` des adjacences de $\mathcal{G}$, et renvoyant en sortie la liste des triangles de $\mathcal{G}$. Par exemple, la fonction devra renvoyer (à l'ordre près des triangles)

$$[[0,2,3],[1,2,3]]$$

pour le graphe ci-dessous.



Partie 2 : Le théorème 1

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1. Pour cela, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mathcal{H}(n)$: "Tout graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n sans triangles admet au plus $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arêtes"

et on va démontrer "$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}(n)$" par récurrence forte.

Pour tout graphe $\mathcal{G}$, on notera $a(\mathcal{G})$ le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$.

(vii) Démontrer $\mathcal{H}(1)$ et $\mathcal{H}(2)$.

($viii$) Démontrer $\mathcal{H}(3)$.

(ix) Soit $n \geq 4$. On suppose, pour l'hérédité traitée dans ces sous questions, que $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et on cherche à démontrer $\mathcal{H}(n)$. On considère donc un graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n sans triangles, et on veut démontrer que $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Pour tout sommet s de $\mathcal{G}$, on notera $d(s)$ le degré de s.

(a) Que dire si $\mathcal{G}$ n'a aucune arête?

(b) On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{G}$ a au moins une arête, et soit $\{u, v\}$ une arête de $\mathcal{G}$. Les sommets u et v peuvent-ils être adjacent à un même sommet?

(c) En déduire que $d(u) + d(v) \leq n$.

(d) Soit $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu à partir de $\mathcal{G}$ en supprimant les sommets u et v ainsi que toutes les arêtes qui leurs sont reliés. En déduire que $a(\mathcal{G}) \leq a(\mathcal{G}') + n - 1$.

(e) Montrer que $a(\mathcal{G}') \leq \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$.

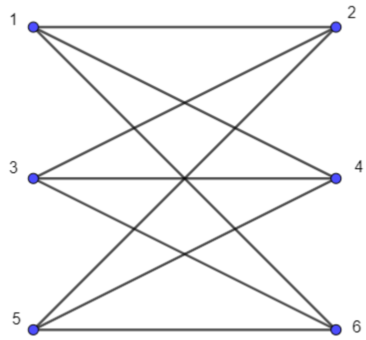
(f) En déduire $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ et conclure la démonstration.

Partie 3 : Cas d'égalité et graphes bipartis

On dit qu'un graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ est bipartis s'il existe deux parties G et D de S telles que:

- $G \cap D = \emptyset$
- $G \cup D = S$
- Toute arête de $\mathcal{G}$ relie un sommet de G à un sommet de D.

(x) Montrer que le graphe $K_{3,3}$ représenté ci-dessous est bipartis.



(xi) Montrer qu'un graphe bipartis est sans triangle.

(xii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = [\![1, 2n]\!]$, $G_n = [\![1, n]\!]$, $D_n = [\![n+1, 2n]\!]$, et $A_n = \{\{i,j\}, i \in G_n, j \in D_n\}$. On pose enfin $K_{n,n} = (S_n, A_n)$.

(a) Représenter $K_{4,4}$.

(b) Écrire une fonction `Python` d'entête `def K(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie une liste des adjacences de $K_{n,n}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'arêtes de $K_{n,n}$?

(d) Que dire sur la borne $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ donnée par le théorème 1?

2. Corrigé

Partie 1

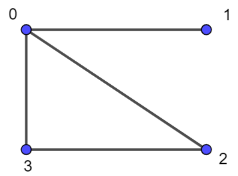
(i) (a) Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}$ dont les sommets sont numérotés de 1 à n. On appelle alors matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, A_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si les sommets i et j sont adjacents} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

(b) Pour i et j entiers entre 1 et n, le coefficient d'indice (i,j) de A^k est le nombre de chemins de longueur k du sommet i au sommet j.

(c) Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe si et seulement si $Id+A+A^2+\ldots+A^{n-1}$ est une matrice à coefficients strictement positifs (où A est la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ et n son ordre).

(ii) (a) **Voici** une représentation du graphe donné.



(b) $\boxed{\text{La matrice d'adjacence de ce graphe est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

(c) L'ensemble S des sommets de ce graphe est $\boxed{S = [\![0,3]\!]}$.

L'ensemble de ses arêtes est $\boxed{A = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{2,3\}\}.}$

(iii)
```
import numpy as np
def MatVersListe(A):
        L=[]                                #future liste des adjacences
        n,p=np.shape(A)
        for i in range(n):
                V=[]                        # V sera la liste des voisins de i
                for j in range(n):
                        if A[i,j]!=0: #Si A[i,j]!=0, i et j sont voisins
                                V.append(j)
                L.append(V) #On rajoute V à L
        return(L)
```

(iv)
```
import numpy as np
def ListeVersMat(L):
        n=len(L) #nombre de sommets
        A=np.zeros((n,n)) #La future matrice d'adjacence
        for i in range(n): #Remplissons la i eme colonne de A avec les adjacences du sommet i
                for j in L[i]: #L[i] est la liste des sommets adjacents au sommet i
                        A[i,j]=1
        return(A)
```

(v) (a) Le coefficient d'indice (i,j) de A^3 dénombre les chemins de longueur 3 du graphe $\mathcal{G}$ du sommet i au sommet j. Or, un triangle étant un cycle de longueur 3 de $\mathcal{G}$, il s'agit d'un chemin de longueur 3 d'un sommet à lui-même. Finalement,

$\boxed{\text{Pour tout entier } k \text{ strictement positif et inférieur à l'ordre de } \mathcal{G}, \text{ le } k\text{-ième coefficient diagonal de } A^3 \text{ est le nombre de triangles passant par le } k\text{-ième sommet.}}$

(b)
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def SansTriangles(A):
        B=al.matrix_power(A,3)
        n,p=np.shape(A)
        for i in range(n):
                if A[i,i]!=0:
                        return(False)
        return(True)
```

(*vi*) (a) Cette fonction renvoie la liste des triangles de la forme `[k,u,v]`, c'est à dire la liste des triangles passant par le sommet numéro `k` et dont les autres sommets ont un indice supérieur à `k`.

(b)
```
def ListeTriangles(L):
        LT = [] #contiendra la liste des triangles
        n=len(L) #ordre du graphe
        for i in range(len(L)): #pour chaque sommet,
                D=NT(L,i)                        #on va rajouter les triangles commençant pa
                LT=LT+D                                concaténation des listes L et D
        return(LT)
```

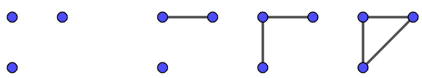
Partie 2

(*vii*) Pour démontrer $\mathcal{H}(1)$, on doit démontrer que tout graphe sans triangle d'ordre 1 admet au plus $\lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$ arêtes. Or, tous les graphes considérés étant simples, un graphe d'ordre 1 a exactement 0 arêtes, d'où $\mathcal{H}(1)$.

De plus, les graphes étant simples et non orientés, il y a exactement deux graphes d'ordre 2 (les dessiner sur la copie!). Un graphe d'ordre 2 a donc 0 ou 1 arêtes, donc au plus $\lfloor \frac{2^2}{4} \rfloor = 1$ arête, ce qui démontre $\mathcal{H}(2)$.

On a bien démontré $\mathcal{H}(1)$ et $\mathcal{H}(2)$.

(*viii*) Voici, avec les conventions de l'énoncé, tous les graphes d'ordre 3, à numérotation près des sommets.



En effet, un tel graphe a au plus 3 arêtes. Tous les graphes d'ordre 3 sans triangles ont donc au plus 2 arêtes (le seul graphe ayant un triangle parmi ceux ci-dessus est le dernier). Or,

$$\lfloor \frac{3^2}{2} \rfloor = \lfloor 4.5 \rfloor = 4$$

donc la borne donnée par $\mathcal{H}(3)$ est bien respectée.

On a bien démontré $\mathcal{H}(3)$.

(*ix*) (a) Si $\mathcal{G}$ n'a aucune arête, il a bien moins de $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \geq 0$ arêtes donc :

Tout graphe $\mathcal{G}$ sans arête d'ordre n vérifie $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

(b) Par l'absurde, si u et v étaient adjacent à un même sommet k, alors le chemin

$$u - v - k - u$$

serait un triangle de $\mathcal{G}$, ce qui contredis que $\mathcal{G}$ est sans triangles.

u et v ne peuvent donc pas être adjacent à un même sommet.

(c) Notons respectivement $D(u)$ et $D(v)$ l'ensemble des voisins de u et de v. Par définition,

$$d(u) = \text{Card}(D(u)) \text{ et } d(v) = \text{Card}(D(v)).$$

D'après la question précédente, $D(u)$ et $D(v)$ sont disjoints donc

$$\text{Card}(D(u) \cup D(v)) = \text{Card}(D(u)) + \text{Card}(D(v)).$$

De plus, $D(u) \cup D(v)$ est une partie de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$, de cardinal n, donc

$$\text{Card}(D(u) \cup D(v)) \leq n.$$

$\boxed{\text{Finalement, on a bien } d(u) + d(v) \leq n.}$

(d) Pour passer du graphe $\mathcal{G}$ au graphe $\mathcal{G}'$, les arêtes supprimées sont exactement les arêtes passant par u ou par v. Il y a $d(u)$ arêtes passant par u, $d(v)$ arêtes passant par v, et exactement 1 arête passant à la fois par u et v.

Ainsi, le nombre d'arêtes supprimées pour passer de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}'$ est exactement

$$d(u) + d(v) - 1.$$

On a donc :

$$a(\mathcal{G}) = a(\mathcal{G}') + d(u) + d(v) - 1 \leq a(\mathcal{G}') + n - 1$$

d'après la question précédente.

$\boxed{\text{On a bien démontré } a(\mathcal{G}) \leq a(\mathcal{G}') + n - 1.}$

(e) $\mathcal{G}'$ est un graphe d'ordre $n - 2 \geq 1$. De plus, $\mathcal{G}'$ est sans triangle car $\mathcal{G}$ est sans triangle, et tout triangle de $\mathcal{G}'$ serait un triangle de $\mathcal{G}$.

D'après $\mathcal{H}(n-2)$ (supposé vrai pour l'hérédité) appliqué à $\mathcal{G}'$, on a donc :

$$\boxed{a(\mathcal{G}') \leq \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor.}$$

(f) On a donc :

$$\begin{aligned}
a(\mathcal{G}) &\leq a(\mathcal{G}') + n - 1 && \text{d'après 9(d)} \\
&\leq \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor + n - 1 && \text{d'après la question précédente} \\
&= \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 \rfloor && \text{car } n - 1 \in \mathbb{Z} \\
&= \lfloor \frac{n^2 - 4n + 4 + 4n - 1}{4} \rfloor \\
&= \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{on a bien démontré } a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.}$

Finalement, on a traité l'initialisation avec $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \mathcal{H}(3)$ en questions 7 et 8 et, par récurrence forte, on a démontré que pour tout entier $n \geq 4$, si $\mathcal{H}(1), \ldots, \mathcal{H}(n-1)$ sont tous vrais, alors pour tout graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n sans triangle, que $\mathcal{G}$ ait au moins une arête ou non, on a $a(\mathcal{G}) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ce qui démontre bien $\mathcal{H}(n)$.

Par principe de récurrence, on a bien démontré que $\mathcal{H}(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 1$, d'où le théorème 1.

Partie 3

(x) Il suffit de prendre $G = \{1, 3, 5\}$ et $D = \{2, 4, 6\}$: on vérifie aisément que toute arête de $K_{3,3}$ relie bien un élément de G à un élément de D.

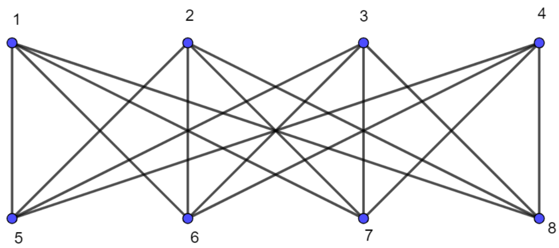
$\boxed{K_{3,3} \text{ est bien bipartis.}}$

(xi) Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe bipartis, et G et D deux parties de S comme dans la définition de la notion de graphe bipartis.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{G}$ admette un triangle $u - v - w - u$. Alors, d'après le principe des tiroirs, au moins deux des trois sommets u,v et w sont dans le même ensemble G ou D. Si, par exemple, u et v sont tous deux dans G, alors on aurait une arête $u - v$ entre deux éléments de G, ce qui contredis les conditions sur G et D (tout arête de $\mathcal{G}$ reliant un élément de G à un élément de D, on aurait $v \in D$, ce qui contredis $G \cap D = \emptyset$).

$\boxed{\text{Tout graphe bipartis est bien sans triangles.}}$

(xii) (a) Voici la représentation graphique demandée :



(b) On numérote les sommets de $K_{n,n}$ de 0 à $2n - 1$. Les listes d'adjacences de $K_{n,n}$ sont faciles à donner : elles sont `[n,n+1,...,2*n-1]` pour les n premières, et et `[0,1,...,n-1]` pour les n dernières. On en tire le code suivant.

```
def K(n):
        D=[i for i in range(n,2*n)]   #n premières listes d'adjacences
        F=[i for i in range(n)] #n dernières listes d'adjacences
        Rep=[D]*n+[F]*n                #Rep vaut [D,D,...,D,F,F,...,F], n répétitions
        return(Rep)
```

(c) Chaque arête de $K_{n,n}$ reliant un élément de G_n à un élément de D_n, il suffit de compter le nombre $d(k)$ des arêtes dont une extrémité est un élément k de G_n, et, chaque arête de $K_{n,n}$ passant par exactement un élément de G_n, de sommer ces valeurs de $d(k)$ pour $k \in G_n$.

Si $k \in G_n$, on a $d(k) = n$ car par définition de A_n, il y a exactement une arête $k - v$ de $K_{n,n}$ passant par k pour chaque élément v de D_n.

$\boxed{G_n \text{ étant de cardinal } n\text{, il y a donc } n \times n = n^2 \text{ arêtes dans le graphe } K_{n,n}.}$

(d) $K_{n,n}$ est clairement bipartis donc sans triangles d'après la question 11.

De plus, il est d'ordre $2n$ et dispose de n^2 arêtes.

Or, $\lfloor \frac{(2n)^2}{4} \rfloor = \lfloor n^2 \rfloor = n^2$.

Ainsi, la borne donnée par le théorème 1 est atteinte pour $K_{n,n}$, donc $\boxed{\text{cette borne est optimale.}}$