Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°14 : Théorie des graphes

2024-2025
Mathématiques

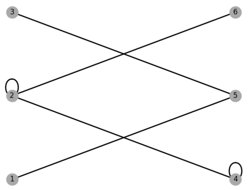
Pour commencer

Exercice 1 *Vrai ou faux?*

(a) Un graphe est non connexe si et seulement si il a un sommet isolé.

(b) Dans un groupe de 20 élèves, il est possible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, que neuf d'entre eux aient exactement 4 amis, et que quatre d'entre eux aient exactement 7 amis.

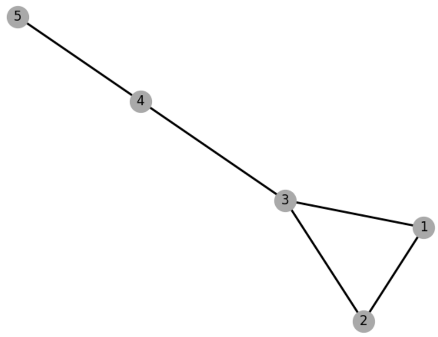
(c) Le graphe suivant est connexe :



(d) Le graphe de la question précédente est bipartis.

(e) Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours deux sommets de même degré.

Exercice 2 Considérons le graphe représenté ci-dessous.

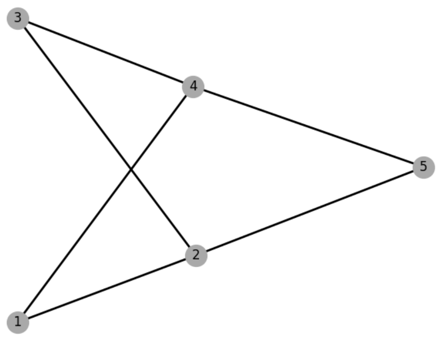


(a) donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

(b) Combien de chemins de longueur 4 existe-t-il entre les sommets 1 et 4? Lister ces chemins.

(c) Démontrer par un calcul que ce graphe est connexe.

Exercice 3 Considérons le graphe représenté ci-dessous.



(a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{2k+1} = 6^k M$.

(c) En déduire le nombre de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

Exercice 4 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté, et M une matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

(a) On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que M^d est à coefficients strictement positifs. Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

(b) On suppose $S = [\![1, 5]\!]$ et $A = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,5), (5,1), (5,4)\}$.

  (i) Représenter graphiquement $\mathcal{G}$.

  (ii) Déterminer la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

  (iii) Calculer M^3, en déduire que $\mathcal{G}$ est connexe.

Exercice 5 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe simple non orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ possédant au moins une arête.

(a) On suppose qu'il n'existe aucun cycle dans $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathcal{G}$ a au moins deux sommets de degré 1. *On pourra admettre l'existence d'une chaîne sans répétition d'arêtes de longueur maximale.*

(b) Montrer par récurrence sur n que si $\mathcal{G}$ n'a aucun cycle, alors $\mathrm{Card}(A) < n$.

(c) On suppose qu'il existe un unique cycle dans $\mathcal{G}$. Montrer $\mathrm{Card}(A) \leq n$.

Exercice 6 *Plus difficile.* Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\delta = \min_{s \in S}(\deg(s))$ le plus petit des degrés des sommets de $\mathcal{G}$.

(a) Montrer que si $\delta \geq 2$, alors $\mathrm{Card}(A) \geq n$.

(b) En déduire que si $\mathcal{G}$ est connexe, alors $\mathrm{Card}(A) \geq n - 1$.

(c) Donner un exemple de graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ connexe tel que $\mathrm{Card}(A) = n - 1$.

(d) Montrer que si $\mathrm{Card}(A) = n - 1$ et $\mathcal{G}$ n'a aucun cycle, alors $\mathcal{G}$ est connexe. On pourra utiliser un résultat de l'exercice précédent.

Exercice 7 Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre pair $2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p. Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

On montrera que deux sommets quelconques de $\mathcal{G}$ sont reliés par une chaîne de longueur au plus 2.

Exercice 8 *Penser au théorème d'Euler* Montrer que si $\mathcal{G}$ est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, alors le graphe obtenu en retirant une arête à $\mathcal{G}$ est toujours connexe.

Exercice 9 *Exercice du cours. La question (e) est importante (gros calcul classique).* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K_n le graphe complet d'ordre n de sommets $1, 2, \ldots, n$.

(a) Quel est le nombre total d'arêtes de K_n ?

(b) Donner la matrice d'adjacence M de K_n.

(c) Donner une matrice J telle que $M = J - I_n$.

(d) Calculer J^p pour tout entier naturel p.

(e) En déduire le calcul de M^p, pour tout entier naturel p.

(f) Donner le nombre de chaînes de longueur p de i vers j dans K_n, en fonction de i et j.

Exercice 10 *Tous les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés.*

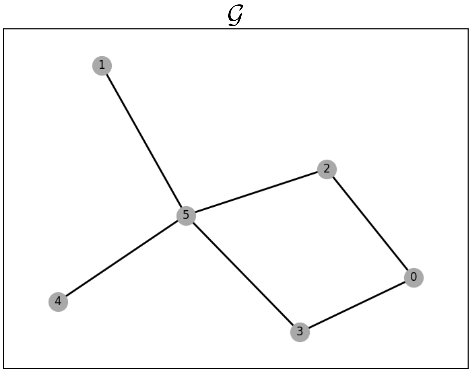
Pour tout graphe non orienté $\mathcal{G} = (S, A)$, on appelle *graphe des arêtes complémentaires* le graphe noté $\bar{\mathcal{G}}$ donné par :

$$\bar{\mathcal{G}} = (S, A')$$

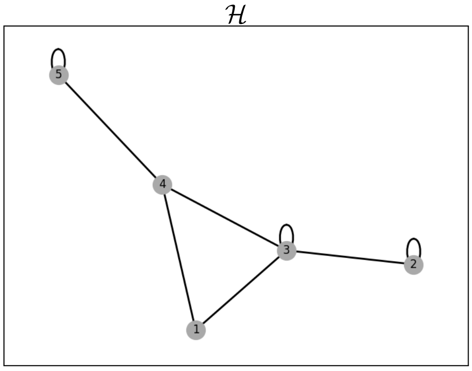
où $A' = \{\{u, v\} | (u, v) \in S^2 \text{ tel que } \{u, v\} \notin A\}$.

(a) (i) Représenter le graphe des arêtes complémentaires de chaque graphe représenté ci-dessous.

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$



(ii) Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Notons n son ordre et fixons une numérotation $s_1, \ldots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$. On note M la matrice d'adjacence obtenue pour $\mathcal{G}$, et M' la matrice d'adjacence ainsi obtenue pour $\bar{G}$. Déterminer $M + M'$.

(b) Le but des sous questions suivantes est de démontrer le théorème suivant : dans groupe de 6 personnes dont certaines sont amies et d'autres non ("être ami" étant symétrique), il existe systématiquement trois personnes qui sont ou bien toutes amies entre elles, ou bien toutes non-amies entre elles.

On considère donc un tel groupe de 6 personnes, numérotées de 1 à 6, et on note $\mathcal{G}$ le graphe donnant les relations d'amitié entre ces personnes (les sommets sont les entiers de 1 à 6, et il y a une arête entre les sommets i et j ssi les personnes i et j sont amies).

(i) Formuler, en terme de propriété de graphe, la propriété, notée $\mathcal{P}$, qu'on doit démontrer sur le graphe $\mathcal{G}$ pour prouver le théorème ci-dessus.

(ii) Montrer que $\mathcal{G}$ vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si $\bar{\mathcal{G}}$ vérifie P.

(iii) Soit s un sommet de $\mathcal{G}$. Montrer que : s a au moins trois voisins dans $\mathcal{G}$, ou s a au moins trois voisins dans $\bar{\mathcal{G}}$.

(iv) Conclure à l'aide d'une disjonction des cas.

(v) Montrer qu'il existe un graphe d'ordre 5 ne vérifiant pas la propriété $\mathcal{P}$.

(vi) La propriété $\mathcal{P}$ est-elle vérifiée par tout graphe d'ordre plus grand que 6?

Exercice 11 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe simple non orienté et connexe d'ordre $n \geq 2$.

Si s et t sont deux sommets de $\mathcal{G}$, on appelle *distance* de s à t l'entier noté $d(s,t)$ donné par la plus petite longueur d'une chaîne de $\mathcal{G}$ de s vers t. On a en particulier $d(s,s) = 0$.

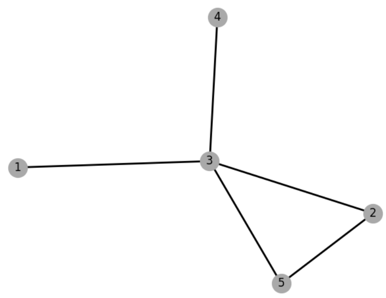
Pour tout $s \in S$, on appelle *excentricité* de s dans $\mathcal{G}$ l'entier $e(s) = \max_{t \in S} d(s,t)$.

On appelle *diamètre* du graphe $\mathcal{G}$ l'entier : $D_{\mathcal{G}} = \max_{s \in S} e(s)$.

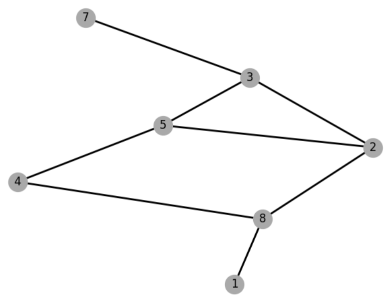
On appelle *rayon* du graphe $\mathcal{G}$ l'entier $\rho_{\mathcal{G}} = \min_{s \in S} e(s)$.

On appelle *centre* du graphe $\mathcal{G}$ l'ensemble : $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} = \{s \in S, e(s) = \rho_{\mathcal{G}}\}$.

(a) On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci dessous. Déterminer $e(s)$ pour chaque sommet s de $\mathcal{G}$. En déduire $D_{\mathcal{G}}$, $\rho_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$.



(b) Même question pour le graphe ci-dessous.



(c) On revient au cas général. Montrer que pour tous sommets s et g :

(i) $d(s,t) = 0 \iff s = t$.

(ii) $d(s,t) = d(t,s)$.

(iii) Pour tout sommet u, $d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t)$.

On dit que d est une distance sur l'ensemble des sommets.

(d) A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{G}$ as-t-on $D_{\mathcal{G}} = 1$?

(e) Montrer $D_{\mathcal{G}} \leq 2\rho_{\mathcal{G}}$.