Chapitre 15 : Séries numériques

ECG1 A, Lycée Hoche

L'idée est de formaliser la notion de somme infinie. On utilise la notion de limite pour donner un sens à des égalités (HP) comme :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

ou montrer que certaines sommes infinies ne sont pas bien définies. Par exemple, la fameuse série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, et la somme

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \ldots$$

n'a pas de limite du tout (à chaque ajout d'un terme, la valeur de la somme échange sa valeur entre 0 et 1, et la somme ne se stabilise donc pas vers une valeur finie).

I. Généralités sur les séries numériques

1. Série numérique

Définition 1. Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k \geq n_0}$ une suite réelle.
On appelle ***série de terme général*** u_k, et on note $\sum_{k \geq n_0} u_k$, la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, le réel $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelé ***la somme partielle d'indice*** n de la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$.

Remarque. (*i*) La série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est donc une suite, la suite de ses sommes partielles. Par exemple, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$, appelée la ***série harmonique***, est la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ où pour tout entier $n \geq 1$, S_n est le réel :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par exemple, $S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, et $S_{100} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100}$ vaut environ $5,18$.

(*ii*) Dans la notation $\sum_{k \geq n_0} u_k$ introduite ci-dessus, k est une variable muette (ou locale). Cette notation est donc bien définie si et seulement si k n'est pas déjà fixé, et dans ce cas elle a le même sens que $\sum_{l \geq n_0} u_l$ (si l n'est pas non plus déjà fixé).

(*iii*) On trouve parfois la notation $\sum_{k} u_k$ ou $\sum u_k$ pour désigner $\sum_{k \geq n_0} u_k$, à condition que le rang du premier terme de la suite u soit clair.

Exemple 2. (*i*) La série $\sum_{k\geq 1} 1$ est la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. La somme partielle d'indice n de $\sum_{k\geq 1} 1$ vaut donc n. Ainsi, $\sum_{k\geq 1} 1$ est une suite qui tend vers $+\infty$: on dira que la série $\sum_{k\geq 1} 1$ diverge.

(*ii*) Considérons la série $S = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$. Alors, $S = (S_n)_{n\geq 0}$ où pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. On reconnait en S_n une somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ donc :

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Sans forme indéterminée :

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

On dira que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$ converge, et a pour somme 2. Cela formalise l'égalité :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots = 2.$$

2. Nature d'une série

Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si c'est une série convergente ou divergente, selon la définition ci-dessous.

Définition 3. Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle. Notons S_n la somme partielle d'indice n de $\sum_{k\geq n_0} u_k$, pour tout entier $n \geq n_0$.

(*i*) On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ ***converge*** si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge. Autrement dit, $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge si et seulement si la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle ***somme de la série*** $\sum_{k\geq n_0} u_k$ le réel noté $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ donné par :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

(*ii*) On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ ***diverge*** si elle ne converge pas.

Remarque. Si vous êtes à l'aise avec la nature des objets, la définition de " $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge" n'en est pas vraiment une (cette série converge si elle converge en tant que suite, et par définition c'est une suite).

Exemple 4. (i) Montrons que $\sum_{k\geq 0} k$ diverge.

Notons, pour tout entier naturel n, S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc sans forme indéterminée, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, $(S_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas : $\sum_{k\geq 0} k$ diverge.

(ii) Montrons que $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^k}$ converge. Pour tout entier naturel n, notons S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

(on reconnait une somme géométrique de raison $\frac{1}{3} \neq 1$).

Ainsi, $S_n = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{n+1}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$.

Par définition, $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^k}$ converge, et a pour somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}.$$

(iii) Le résultat de l'exercice suivant (en fait déjà vu lors du chapitre sur les suites réelles) est très important : **la série harmonique diverge**.

Exercice 5. (i) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(\frac{k+1}{k}) \leq \frac{1}{k}$.

(ii) En déduire que $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(iii) En déduire que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Remarque. La technique employée ici (utiliser une comparaison pour étudier la nature d'une série) est très commune, et fait l'objet d'un théorème en partie III.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

(i) Vous devez faire particulièrement **attention** à la terminologie, et à ne pas confondre les différents objets intervenants dans ce chapitre.

- $\sum_{n\geq n_0} u_n$ désigne la série de terme général u_n. C'est une **suite**.
- Pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est un **réel** (défini avant ce chapitre), appelé la n-ième somme partielle de la série de terme général u_k. Notons cette n-ième somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n.$$

En tant que suite, $\sum_{k\geq n_0} u_k$ **est** la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$.

- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **n'est pas toujours défini**. Cette notation est définie si et seulement si la série de terme général u_n converge. Dans ce cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est un **réel**, appelé somme de la série de terme général u_n, qui est la limite de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$.

(*ii*) En particulier, envisager l'objet $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré que la série de terme général u_n converge est une faute.

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, et on dispose d'une relation de Chasles.

Proposition 6. *Soit n_0 un entier naturel, $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle et $n_1 > n_0$ un entier. Alors, la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geq n_1} u_k$ converge, et dans ce cas :*

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration. À noter. □

3. Liens entre suites et séries

Remarque. Formellement, une série est une suite donc le lien est immédiat. Mais on dispose de passage intéressants d'une notion à l'autre. Commençons par une remarque.

Proposition 7. *Soit $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle (où n_0 est un entier naturel). Notons, pour tout entier n, S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$. Alors :*

$$\forall n \geq n_0 + 1, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration. C'est immédiat, car par Chasles, pour tout $n \geq n_0 + 1$:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + u_n.$$

□

Exemple 8. Dessin à noter.

Remarque. Voici une conséquence pratique, fournissant une manière de démontrer qu'une série diverge dans des cas simples.

Proposition 9. (et définition.) *Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle. Si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Par contraposition, si (u_k) ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_k diverge. Dans ce cas, on dit que la série de terme général u_k* ***diverge grossièrement****.*

Démonstration. À noter. □

Remarque. Attention, la réciproque de cette proposition est fausse et c'est une erreur très courante. Par exemple, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Il est faux de dire qu'une série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ série converge "car $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$".

Exemple 10. $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la suite $(n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} n$ diverge grossièrement (donc diverge).

Exemple 11. Que dire des séries $\sum_{k\geq 0}(-1)^k$ et $\sum_{k\geq 1} 1-\frac{1}{k}$?

D'un autre point de vue, si l'on étudie la convergence d'une suite $(u_n)_n$, on peut considérer la série de terme général $u_{n+1}-u_n$.

Définition 12. On dit qu'une série S est ***télescopique*** s'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\geq n_0}$ telle que :

$$S=\sum_{k\geq n_0} a_{k+1}-a_k.$$

Proposition 13. *Soit S une série télescopique. Soient n_0 un entier et $(a_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle tels que :*

$$S=\sum_{k\geq n_0} a_{k+1}-a_k.$$

Alors, S converge si et seulement si la suite $(a_k)_{k\geq n_0}$ converge.

Exemple 14. Dessin à noter.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Plutôt que d'utiliser cette proposition, on devra systématiquement reprendre ce raisonnement qui permet, au passage, d'avoir une égalité reliant la somme de la série $\sum_k a_{k+1}-a_k$ et la limite de la suite (a_k).

Exemple 15. Démontrer que $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k(k-1)}$ converge.

4. Combinaison linéaire de séries convergentes

Proposition 16. *Soit n_0 un entier, et $(u_k)_{k\geq n_0}$ et $(v_k)_{k\geq n_0}$ deux suites réelles.*
Si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ convergent, alors :

(i) Pour tous réels λ et μ, la série $\sum_{k\geq n_0}\lambda u_k+\mu v_k$ converge, et

(ii) $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}(\lambda u_k+\mu v_k)=\lambda\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k+\mu\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$

Démonstration. À noter. □

Remarque. En particulier, cet énoncé montre que :

(*i*) Si la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, alors la série $\sum_{k\geq n_0}\lambda u_k$ converge pour tout réel λ, et $\sum_{k=n_0}^{+\infty}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

(ii) Si les séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ convergent, alors la série $\sum_{k\geq n_0} u_k + v_k$ converge, et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + v_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \sum_{k\geq n_0} v_k$.

Remarque. Quand on utilise ce résultat, on dit qu'on utilise la propriété de linéarité de la sommation (on dit que la série $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ est une combinaison linéaire des séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$).

Exemple 17. Montrons que $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} - 4 \cdot 3^{-n}$ converge, et calculons sa somme.

Remarque. Attention à ne pas utiliser la linéarité quand vous n'avez pas le droit. Par exemple,

(i) On a démontré dans un exercice précédent que $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ converge.

(ii) On a $\forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, mais

(iii) On ne peut pas écrire $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$ car $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$ ne sont pas définis (les séries concernées divergent).

Remarque. Des réciproques partielles de ce résultat existent mais présentent certaines subtilités. Il faudra refaire le raisonnement de l'exercice suivant pour s'en servir.

Exercice 18. Soient u et v deux suites réelles définies à partir d'un rang n_0.

(i) Montrer que si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ diverge, alors $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ diverge pour tous réels λ et μ tels que $\mu \neq 0$. Que dire si $\mu = 0$?

(ii) Montrer que si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge et $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ diverge pour certains réels λ et μ tels que $\mu \neq 0$, alors $\sum_{k\geq n_0} v_k$ diverge. Que dire si $\mu = 0$?

(iii) Montrer que si les séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ divergent, on ne peut rien conclure sur la série $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ en général.

5. Changement de variable

Proposition 19. *Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle.*
Pour tout entier relatif l tel que $l \leq n_0$, il est équivalent de dire :

(i) $\sum_{k\geq n_0} u_k$ *converge, et*

(ii) $\sum_{k\geq n_0 - l} u_{k+l}$ *converge*

De plus, dans ce cas :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0-l}^{+\infty} u_{k+l}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans la démonstration, on a utilisé la proposition suivante : pour toute suite réelle $(S_n)_{n\geq n_0}$, pour tout entier relatif l, les suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(S_{n+l})_{n\geq n_0-l}$ ont la même nature, et même limite si elles admettent une limite. On utilise souvent cette proposition lorsqu'on étudie des suites récurrentes, pour affirmer que " $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$" (avec $l = 1$).

Remarque. Cette proposition est la formule de changement de variable pour les séries. La contrainte $l \leq n_0$ ne sert qu'à garantir que les sommes partielles considérées par ces séries sont indexées par des entiers naturels, et pourrait être retirée.

Exemple 20. Que dire de $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{n-1}$? De $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{k-1}}$?

II. Séries classiques

On dispose de quelques séries de référence, dont on connait bien la nature et la valeur de l'éventuelle somme, qui nous servent à traiter les séries rencontrées dans nos problèmes.

1. Série géométrique

Proposition 21. (**et définition**.) *Soit q un réel. Alors :*

(i) Si $q \in]-1,1[$, alors $\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

(ii) Sinon, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k$ diverge.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k$ est appelée la série géométrique de raison q.

Démonstration. À noter. □

Remarque. La convergence d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, on peut invoquer ce résultat pour caractériser la convergence d'une série de la forme $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} q^k$ où $q \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Proposition 22. *Soit $q \in]-1,1[$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors, la série $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} q^k$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q}$*

Démonstration. À noter. □

Exemple 23. Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} 2\times 5^{-k}$ *(ii)* $\displaystyle\sum_{k\geq 0} 3\times 2^{k}$ *(iii)* $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{3^k}$.

Exercice 24. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-\alpha n}$ en fonction du réel α et donner la valeur de sa somme lorsqu'elle converge.

2. Série géométrique dérivée d'ordre 1 ou 2

Proposition 25. (**et définition**.) *Soit q un réel. Alors :*

(i) Si $q \in]-1,1[$, alors $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

(ii) Sinon, $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ diverge.

On dit que $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ est la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison q.
D'autre part :

(i) Si $q \in]-1,1[$, alors $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

(ii) Sinon, $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ diverge.

On dit que $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ est la série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison q.

Démonstration. À noter. □

Exemple 26. Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

(i) $\sum_{k\geq 0} k \times 5^{1-k}$ *(ii)* $\sum_{k\geq 0} k \times 2^k$ *(iii)* $\sum_{k\geq 1} k(k-1)\frac{1}{3^k}$.

Exercice 27. Soit $p \in]-1,1[$. Déterminer la nature et l'éventuelle somme de $\sum_{k\geq 0} k^2 p^k$. On utilisera que pour tout entier k, $k^2 = k + k(k-1)$.

3. Série de Riemann

Voici le critère de convergence des séries de Riemann.

Proposition 28. (**et définition.**) *Soit α un réel. Alors, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
*La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ est appelée la **série de Riemann de paramètre** α.*

Démonstration. Cas $\alpha \leq 1$ à noter. Cas $\alpha > 1$ admis, nous verrons une démonstration très intéressante dans le chapitre sur les intégrales. □

Exemple 29. La séries harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $1 \leq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Remarque. Cet énoncé ne dit rien sur la valeur de la somme des séries de Riemann convergentes ! Et elles sont compliquées. Comme dit dans l'introduction, un résultat bien hors programme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 30. Que dire de la nature...

(i) de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$?

(ii) de $\sum_{n\geq 1} 2^n + \frac{1}{n\sqrt{n}}$?

(iii) de $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n^2}$?

4. Série exponentielle

Voici le résultat relatif aux séries dites "exponentielles".

Proposition 31. (**et définition.**)*Pour tout réel x, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge et :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

*La série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est appelée la **série exponentielle de paramètre** x.*

Démonstration. Admis. □

Exemple 32. Que dire de $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$?

Exercice 33. Déterminer la nature et l'éventuel somme de $\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!}$.

5. Une technique classique pour les séries alternées (HP en théorie, pas en pratique)

Remarque. On dit qu'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est alternée si $(u_n)_n$ change de signe à chaque nouveau terme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leq 0$.

Dans ce cas, on peut démontrer (HP) que si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $(|u_n|)_n$ est décroissante, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Par exemple, c'est le cas de $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$, car $|\frac{(-1)^k}{k}| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, $(\frac{1}{k})_k$ est décroissante , et $(\frac{(-1)^k}{k})_k$ change bien de signe à chaque terme.

Autres exemples : $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$, $\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

En pratique, on suivra la méthode ci-dessous en présence de séries de la forme $\sum_{k\geq n_0}(-1)^k u_k$ où $(u_k)_k$ est une suite décroissante qui tend vers 0.

Exemple 34. Méthode : Pour redémontrer qu'une série alternée converge, selon les conditions ci-dessus, on utilise le théorème des suites adjacentes selon les étapes suivantes.

- Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est alternée, et telle que $(|u_n|)_n$ converge vers 0 en étant décroissante. Notons, pour tout entier n, S_n la somme partielle d'indice n de cette série.
- On montre que $(S_{2n})_n$ et (S_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc ces suites sont adjacentes.
- Par le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite.
- Par le théorème relatif aux sous suites de rangs pairs et impairs, $(S_n)_n$ converge vers cette limite commune.
- Par définition, la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge.

Exemple 35. Montrons que $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

III. Séries à termes positifs et convergence absolue

Si u_n est positif pour tout entier n, alors l'étude de la série de terme général u_n s'en retrouve simplifiée, et on dispose de théorèmes propres à cette situation.

1. Propriétés des séries à terme positif

Définition 36. Soit $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle (où $n_0 \in \mathbb{N}$).
On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est à termes positifs si u_k est positif pour tout entier $k \geq n_0$.

Proposition 37. *Soit $\sum_{k\geq n_0} u_k$ une série à termes positifs. Notons, pour tout entier $n \geq n_0$, S_n sa somme partielle d'indice n. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, et

(ii) la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée

Dans ce cas :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. L'idée est très simple : la suite $(S_n)_n$ est croissante, donc on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

Démonstration. À noter. □

2. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs

Voici le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Théorème 38. *Soit n_0 un entier naturel.*
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors :

(i) Si $\sum_{k\geq n_0} v_k$ converge, alors $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$.

(ii) Si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ diverge, alors $\sum_{k\geq n_0} v_k$ diverge.

Démonstration. À noter. □

Exemple 39. (i) Montrer que $\forall k \geq 2, \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

(ii) Sans utiliser le critère de convergence des séries de Riemann, montrer que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 40. (i) Montrons que $\forall k \geq 0, \dfrac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$.

(ii) En déduire la nature de $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{e^k + e^{-k}}$.

Exemple 41. Montrons que $\sum_{k\geq 2} \dfrac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge.

Exemple 42. Montrons que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.

3. Convergence absolue de séries

Définition 43. On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ ***converge absolument*** si la série $\sum_{k\geq n_0} |u_k|$ converge.

Proposition 44. *Si une série converge absolument, alors elle converge.*

Démonstration. À noter. □

Remarque.

- La réciproque est fausse. Par exemple, si on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier n, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge (c'est une série alternée pour laquelle la méthode précédente s'applique), mais $\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann de paramètre $1 \leq 1$), donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge mais ne converge pas absolument.
- Ainsi, pour démontrer qu'une série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, on peut essayer de démontrer que $\sum_{k\geq n_0} |u_k|$ converge et utiliser les théorèmes relatifs aux séries à termes positifs.

Exemple 45. Que dire de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$?