Programme de colle n^o 21 : Séries numériques.

*Semaine du lundi **17 mars**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les séries numériques

21.1 Notion de série de terme général u_k, notation $\sum_{k\geq n_0} u_k$. Somme partielle d'indice n d'une série. Nature d'une série : séries convergentes, séries divergentes. Somme d'une série convergente. Divergence de la série harmonique (exercice 5). "La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes" et relation de Chasles (prop. 6).

21.2 Lien entre suites et séries I : Si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_k u_k$, alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout n convenable. Conséquence : si la série $\sum_k u_k$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Contraposée et notion de divergence grossière d'une série. Attention, la réciproque est fausse : il ne suffit pas que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour que $\sum_k u_k$ converge (exemple de la série harmonique).

21.3 Lien entre suite et séries II : notion de série télescopique, convergence des séries télescopiques. Pour appliquer les méthodes liées aux séries télescopiques, on reviendra aux sommes partielles qui sont des sommes télescopiques.

21.4 Combinaisons linéaires de séries convergentes.

21.5 Changement de variable pour les séries.

Les élèves peuvent revenir aux sommes partielles pour mettre en œuvre des changements de variables, et sont encouragés à le faire en cas de difficultés.

Séries classiques

21.6 Séries géométriques, séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, critères de convergence.

21.7 Séries de Riemann de paramètre α, critère de convergence.

21.8 Séries exponentielle, convergence des séries exponentielles.

21.9 Méthode pour étudier la convergence de séries dites "alternées".

(résultat général HP et non donné : méthode à retenir)

Séries à termes positifs, convergence absolue (à finir)

21.10 Notion de série à termes positifs. Critère de convergence des séries à termes positifs.

21.11 Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Pas d'exemple vu en cours, sera terminé lundi.

Python

21.12 Fin du TP sur les matrices.

Commandes `np.dot, np.transpose, al.matrix_power, al.inv`. Construction du triangle de Pascal.

Quelques questions de cours

1. Définir le vocabulaire général des séries : la notion de série, de somme partielle d'indice n d'une série, de série convergente, divergente, et la notion de somme d'une série convergente. Illustrer toutes ces notions sur une série de votre choix. Montrer, sans utiliser le moindre théorème lié aux séries, que $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{2^k}$ converge et calculer sa somme.
2. Définir la série harmonique et montrer qu'elle diverge.
3. Énoncer et démontrer la proposition (6) stipulant que la nature d'une série "ne dépend pas de ses premiers termes" et donnant la relation de Chasles.
4. Énoncer et démontrer la proposition et définition dans laquelle la notion de divergence grossière d'une série est définie. Montrer que la réciproque de l'implication donnée par celle-ci est fausse.
5. Énoncer et démontrer la proposition relative aux séries combinaisons linéaires de séries convergentes.

6. Définir la notion de série géométrique. Énoncer et démontrer le critère de convergence pour les séries géométriques.
7. Définir les notions de séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, et énoncer les critères de convergence pour ces séries. Démontrer le critère concernant les séries géométriques dérivées d'ordre 1.
8. Définir la notion de série de Riemann de paramètre α et donner le critère de convergence des séries de Riemann. Montrer que si $\alpha \leq 1$, alors la série de Riemann de paramètre α diverge.
9. Énoncer la proposition et définition relative aux séries exponentielles. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$ converge et calculer sa somme.
10. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.