Lycée Hoche
ECG1 A

2024-2025
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 5

Devoir du ***15 mars****.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Proche du cours.*

1. Montrer très rigoureusement :

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+ | \exists n \in \mathbb{N}, x^2 + x = n\right\} = \left\{\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2} | k \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}\right.$. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers un ensemble à préciser et déterminer une expression de sa réciproque.

3. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales, avec et sans conditionnement.

4. Énoncer la formule des probabilités composées.

5. Vrai ou faux ? Justifier.

   (*a*) Soit $n \geq 1$ et soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = 0_n$. Si A est inversible, alors $B = 0_n$.

   (*b*) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. La suite $(u_n)_n$ converge vers 2 si et seulement si $(|u_n|)_n$ converge vers 2.

   (*c*) On lance trois fois un dé cubique standard. Le nombre de résultats possibles pour lesquels toutes les faces obtenues sont paires est $3\binom{6}{3}$.

   (*d*) La somme de deux fonctions bijectives de $\mathbb{R}$ vers une partie de $\mathbb{R}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers une partie de $\mathbb{R}$.

6. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices carrées.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (*a*) Définir la notation $\det(A)$.

   (*b*) Énoncer et démontrer la proposition caractérisant l'inversibilité de A à l'aide de $\det(A)$.

8. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

9. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def V(n):` prenant en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoyant en sortie la matrice $V_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (de type `array`) suivante :

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Des pièces et des stratégies. N'ayez pas peur du formalisme !*
Pour cet exercice, on rappelle la notation alternative suivante en probabilités : $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$.

Soit $p \in]\frac{1}{2}, 1[$ fixé dans tout l'exercice.

On dispose de deux pièces : l'une est équilibrée, et l'autre est déséquilibrée et donne "face" avec probabilité p.

On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. Le problème est le suivant : les deux pièces nous sont indiscernables, et on souhaite déterminer une stratégie (concernant notre choix des pièces) permettant de maximiser notre probabilité d'obtenir "face" lors de ces lancers. On appellera **stratégie** un processus décrivant le choix des pièces lancées lors de cette série de lancers (*exemples : voir questions 2, 3 et 5*).

On fixe un espace probabilisable (qu'on pensera fini) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant les issues et événements envisagés dans cet exercice.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements suivants :

- E_n : "on choisit la pièce équilibrée au n-ième lancer".
- F_n : "on obtient face au n-ième lancer".

1. Dans cette question, on considère une stratégie quelconque. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant l'expérience aléatoire obtenue avec cette stratégie.

   Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\mathbb{P}(E_n)$.

2. Dans cette question, on considère la **stratégie 1 :** *à chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces de manière équiprobable.*

   On note $\mathbb{P}_1$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant l'expérience aléatoire obtenue avec cette stratégie.

   Montrer que : $\forall n \geq 1, \mathbb{P}_1(F_n) = \frac{2p+1}{4}$.

3. Dans cette question, on considère la **stratégie 2 :** *au premier lancer, on choisit l'une des pièces de manière équiprobable. Si on obtient "face" à ce premier lancer, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.*

   On note $\mathbb{P}_2$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant l'expérience aléatoire obtenue avec cette stratégie.

   (*a*) Déterminer $\mathbb{P}_2(F_1)$.

   (*b*) Soit $n \geq 2$. Déterminer $\mathbb{P}_2(E_n|E_1)$ et $\mathbb{P}_2(E_n|\overline{E_1})$. En déduire $\mathbb{P}_2(E_n)$.

   (*c*) Montrer que : $\forall n \geq 2, \mathbb{P}_2(F_n) = \frac{4p^2+3}{8}$.

4. Comparer les stratégies 1 et 2.

5. Dans cette question, on considère la **stratégie 3 :** *au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces de manière équiprobable. À chaque lancer suivant, on utilise la même pièce qu'au lancer précédent si celui-ci a donné "face", et on change de pièce sinon.*

   On note $\mathbb{P}_3$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ modélisant l'expérience aléatoire obtenue avec cette stratégie.

   (*a*) Donner les expressions de $\mathbb{P}_3(F_1)$ et de $\mathbb{P}_3(F_2)$.

   (*b*) Déterminer des réels $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\forall n \geq 1, \mathbb{P}_3(E_{n+1}) = a\mathbb{P}_3(E_n) + b.$$

   (*c*) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une expression de $\mathbb{P}_3(E_n)$ en fonction de a, b et n.

   (*d*) Montrer que :

   $$\forall n \geq 2, \mathbb{P}_3(F_n) = \frac{1}{3-2p}\left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

6. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{1}{3-2p}\left(1-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right)-\frac{4p^2+3}{8}=\frac{(2p-1)^3}{8(3-2p)}\left(1-(p-\frac{1}{2})^{n-2}\right).$$

   (b) Comparer les stratégies 2 et 3.

Exercice 3 *Autour des puissances de matrices.*

On pose :
$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.
2. Calculer J^n pour tout entier naturel n.
3. On considère la matrice $L = I + J$.
   (a) Justifier que L est inversible.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$
   (c) Pour toute matrice inversible A et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$A^{-n} = (A^{-1})^n.$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute matrice inversible A, A^{-n} est inversible et $A^n = (A^{-n})^{-1}$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$
4. Donner explicitement L^{-1}.

On rappelle que 0_3 désigne la matrice nulle de taille $(3,3)$, et I_3 désigne la matrice identité de taille $(3,3)$.

On pose $P=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

5. Montrer que P est inversible. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
6. On pose $A = PJP^{-1}$.
   (a) Écrire un code Python permettant d'afficher la matrice A. *Toute commande au programme est autorisée.*
   (b) Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PJ^nP^{-1}.$$
   (c) Justifier que $A^n = 0_3$ pour tout $n \geq 3$.
7. On pose, pour tout réel t:
   $$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$
   (a) Montrer que : $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, E(t)E(t') = E(t+t')$.
   (b) Calculer, pour tout réel t, $E(t)E(-t)$. En déduire que, pour tout t, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de A et t.
   (c) Déterminer, pour tout réel t et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $E(t)^n$ en fonction de t, A et n.

Exercice 4

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-n/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases},$$

et on note C_n la courbe représentative de f_n.

1. Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f_n'(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que $f_n'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
   On admet (théorème hors programme) que l'on démontre ainsi que f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $f_n'(0) = 0$.
   (c) Étudier la limite de f_n en $+\infty$.
   (d) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n admet une asymptote oblique D_n en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
   (b) Écrire le code d'une fonction d'entête `def Trace(n):` Python prenant en entrée un entier naturel `n` (élément de $\mathbb{N}^*$) et dont l'appel affiche le tracé de la courbe $C_{\mathtt{n}}$ de $f_{\mathtt{n}}$ ainsi que son asymptote $D_{\mathtt{n}}$, entre 0 et 100.
4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$ et u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (c) Étudier la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$. En déduire que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n \leq n$.
   (b) Recopier et compléter le code suivant pour qu'il affiche une approximation à 10^{-3} près de u_{100} obtenue par dichotomie. On justifiera la validité de ce code.

```python
import numpy as np
def g(x):
    return x*np.log(x)
a,b=...,...
while abs(b-a) ... 10**(-3):
    m=...
    if g(m) < 100:
        ...
    else:
        ...
print((a+b)/2)
```

6. On dit que deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ à termes non nuls (à partir d'un certain rang) sont *équivalentes* si $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$.
   (b) En déduire que les suites $(\ln(u_n))_n$ et $(\ln(n))_n$ sont équivalentes.
   (c) En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(\dfrac{\ln(n)}{n})_n$ sont équivalentes.

Exercice 5 *Étude d'une expérience aléatoire.*

Soient r et j des entiers naturels non nuls, fixés dans tout l'exercice.

On considère une urne constituée de r boules rouges et de j boules jaunes (aux couleurs d'une équipe de basket gagnante). On note $n = r + j$ le nombre de boules initialement dans l'urne.

On considère l'expérience aléatoire consistant à répéter l'opération suivante : on tire au hasard une boule de cette urne, puis on remet deux boule dans l'urne de la couleur de la boule tirée. Par exemple, si on tire une boule rouge au premier tirage, alors le second tirage se fait avec $n + 1$ boules dans l'urne : $r + 1$ boules rouges et j boules jaunes.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (qu'on pensera fini) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

On adopte les notations suivantes :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k est l'événement "La boule tirée lors du k-ième tirage est rouge".
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier i, on note $[r_k = i]$ l'événement "À l'issue du k-ième tirage, il y a i boules rouges dans l'urne".

Par exemple, si l'on tire une boule rouge lors du premier tirage, alors les événements R_1 et $[r_1 = r + 1]$ sont réalisés.

1. Déterminer $\mathbb{P}(R_1)$ et $\mathbb{P}(\overline{R_1})$ (en fonction de r et n).
2. Déterminer $\mathbb{P}(R_2)$.
3. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ dans cette question.

   (a) Pour quelles valeurs de $i \in \mathbb{N}$ l'événement $[r_k = i]$ est-il de probabilité non nulle ? *On ne cherchera pas une justification trop technique.*

   (b) Que dire des événements $[r_k = r], [r_k = r + 1], ..., [r_k = r + k]$? Justifier soigneusement.

   (c) Montrer que : $(n + k)\mathbb{P}(R_{k+1}) = \displaystyle\sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}([r_k = i])$.

   (d) Montrer que, pour tout $i \in [\![r, r + k]\!]$:

   $$\mathbb{P}\left([r_k = i] \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\right) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}([r_k = i])$$

   et déterminer une expression similaire de $\mathbb{P}\left([r_k = i] \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\right)$ en fonction de $\mathbb{P}([r_k = i])$.

   (e) Exprimer $\mathbb{P}(R_{k+2})$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}([r_k = i] \cap R_{k+1} \cap R_{k+2})$ et $\mathbb{P}([r_k = i] \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2})$ pour i variant dans $[\![r, r + k]\!]$.

   (f) Déduire des questions précédentes une expression de $\mathbb{P}(R_{k+2})$ en fonction de $\mathbb{P}(R_{k+1})$.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Commenter le résultat obtenu.

— Fin de l'énoncé —