

Corrigé du DS n°5.Exercice 1.

1. Posons $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^2 + x = n\}$ et $B = \left\{ \frac{\sqrt{4k+1}-1}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrons $A \subset B$.

Soit $x \in A$.

$x \in \mathbb{R}_+$, et on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 + x = n$.

Donc x est racine de $X^2 + X - n$.

Le polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 + 4n > 0$ donc a pour racines

$$(*) \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4n}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4n}}{2}.$$

Or, $-1 < 0$ et $-\sqrt{1+4n} < 0$ donc $x_1 < 0$. Donc $x \neq x_1$ ($x \in \mathbb{R}_+$).

Donc nécessairement, $x = x_2 = \frac{\sqrt{1+4n}-1}{2}$.

Donc : $\exists k \in \mathbb{N}, x = \frac{\sqrt{1+4k}-1}{2}$.

Donc $x \in B$, et ce pour tout $x \in A$: on a bien $A \subset B$.

Montrons $B \subset A$.

Soit $x \in B$.

On dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}$.

Donc x est racine de $X^2 + X - k$, d'après (*): $x^2 + x = k$.

De plus, $4k+1 \geq 1$ donc $\sqrt{4k+1} \geq \sqrt{1} = 1$. Donc $x \geq 0$.

Ainsi, $x \in \mathbb{R}_+$ et : $\exists n \in \mathbb{N}, x^2 + x = n$.

Donc $x \in A$, d'où $B \subset A$.

Par double inclusion, on a bien $A = B$.

Ex 1 P2

2. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = y$$

$$\Leftrightarrow x = yx + y$$

$$\Leftrightarrow (1-y)x = y$$

Si $y = 1$, $(1-y)x = y$ pour tout réel x car $(1-y)x = 0 \neq 1$.

Si non:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \quad \text{Enfin, } \frac{y}{1-y} \neq -1 \text{ car } y \neq y-1.$$

Ainsi, 1 n'a aucun antécédent par f , et tout réel $y \neq 1$ admet $\frac{y}{1-y}$ comme unique antécédent par f .

Donc f induit une bijection $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, de réciproque :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y & \longmapsto & \frac{y}{y-1} \end{array} \right.$$

3, 4: cours.

So a) Vrai : Si A est inversible, alors

$$AB = O_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O_n$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)B = O_n$$

(car $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), M O_n = O_n$).

$$\Rightarrow I_n B = O_n$$

$$\Rightarrow B = O_n.$$

b) Faux : Posons $u_n = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = 2$. Donc $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Mais $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$: par unicité des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 2$.

L'implication " $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ " n'est donc pas vraie pour toute suite réelle $(u_n)_n$, l'équivalence ne l'est pas non plus.

Ex 1 P3

5 c) Il y a 3 manières de choisir une face paire sur un dé cubique standard, donc par choix successifs il y a 3^3 résultats possibles composés de 3 faces paires.

Or, $3 \binom{6}{3} = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 20 = 60$ et $3^3 = 27$.

$60 \neq 27$. l'affirmation est fausse.

d) C'est faux : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto x$, soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto -x$

f et g sont bijectives ($f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, et $g \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ donc g bijective et $g^{-1} = g$).

Mais $f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto 0$ est constante donc non injective sur $\mathbb{R}$ ($(f+g)(0) = (f+g)(1) = 0$), donc n n'induit pas de bijection de $\mathbb{R}$ vers une partie de $\mathbb{R}$.

g. `import numpy as np`

`def V(n):`

`M = np.zeros((n,n))`

`for i in range(n):`

`for j in range(n):`

`M[i,j] = (j+1)**i`

`return(M)`

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \geq 1$.

$(E_n, \bar{E}_n)$ est un système complet d'événements:
par la formule des probabilités totales,

$$(*) \quad P(F_n) = P(E_n \cap F_n) + P(\bar{E}_n \cap F_n).$$

$$\text{Or, si } P(E_n) \neq 0, \quad P(E_n \cap F_n) = P(E_n) P(F_n | E_n) \\ = \frac{1}{2} P(E_n)$$

car si E_n est réalisé, le tirage se fait avec la pièce équilibrée, donc $P(F_n | E_n) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Si } P(E_n) = 0, \quad E_n \cap F_n \subset E_n \text{ donc} \\ 0 \leq P(E_n \cap F_n) \leq P(E_n).$$

$$\text{Donc } P(E_n \cap F_n) = 0 = \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2} P(E_n).$$

$$\text{Dans tous les cas, } P(E_n \cap F_n) = \frac{1}{2} P(E_n).$$

$$\text{De même, } P(\bar{E}_n \cap F_n) = \begin{cases} P(\bar{E}_n) P(F_n | \bar{E}_n) & \text{si } P(\bar{E}_n) \neq 0 \\ 0 & \text{si } P(\bar{E}_n) = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \begin{cases} p P(\bar{E}_n) & \text{si } P(\bar{E}_n) \neq 0 \\ p P(\bar{E}_n) & \text{si } P(\bar{E}_n) = 0 \end{cases}$$

$$= p P(\bar{E}_n).$$

(1): si $P(\bar{E}_n) \neq 0$, $P(F_n | \bar{E}_n)$ est la probabilité de faire face avec la pièce déséquilibrée donc vaut p .

On a alors, d'après (*):

$$P(F_n) = \frac{1}{2} P(E_n) + p P(\bar{E}_n) = \frac{1}{2} P(E_n) + p(1 - P(E_n))$$

$$\underline{P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P(E_n).}$$

EX2P2

2. Vu la stratégie 1:

$$\forall n \geq 1, P_1(E_n) = \frac{1}{2}.$$

Le résultat de la question 1 étant valable pour toute stratégie, il est valable pour la stratégie 1:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, P_1(F_n) &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P_1(E_1) \\ &= p + \frac{1-2p}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{2p+1}{4} \end{aligned}$$

On a bien montré: $\forall n \geq 1, P_1(F_n) = \frac{2p+1}{4}$.

3. a) Pour la stratégie 2, la première pièce est choisie de manière équiprobable.

$$P_2(E_1) = P_2(\bar{E}_1) = \frac{1}{2}.$$

D'après le résultat de 1.:

$$P_2(F_1) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P_2(E_1) = \frac{2p+1}{4}.$$

Rq. On pourrait aussi dire $P_2(F_1) = P_1(F_1) = \frac{2p+1}{4}$ car le premier lancer s'effectue dans les mêmes conditions avec les stratégies 1 et 2.

b) $P_2(E_1) = P_2(\bar{E}_1) \neq 0 \therefore P_2(E_n|E_1)$ et $P_2(E_n|\bar{E}_1)$ sont bien définies.

D'après la stratégie 2, vu que $n \geq 2$ et $P_2(E_n|E_1)$ étant la probabilité d'effectuer le n^{e} lancer avec la

Ex2P3

pièce équilibrée sachant qu'on l'a choisie au 1^{er} lancer,
 $P_2(E_n | E_1)$ est la probabilité de faire face
 avec la pièce équilibrée au premier lancer:

$$P_2(E_n | E_1) = \frac{1}{2}$$

De même, $P_2(E_n | \bar{E}_1)$ est la probabilité de faire pile
 avec la pièce déséquilibrée au premier lancer.

Donc: $P_2(E_n | E_1) = \frac{1}{2}$ et $P_2(E_n | \bar{E}_1) = 1-p$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée
 au système complet d'événements $(E_1, \bar{E}_1)$:

$$P_2(E_n) = P_2(E_1) P_2(E_n | E_1) + P_2(\bar{E}_1) P_2(E_n | \bar{E}_1)$$

(car $P_2(E_1) = P_2(\bar{E}_1) = \frac{1}{2} \neq 0$)

Finalement: $P_2(E_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1-p)$

$$P_2(E_n) = \frac{3-2p}{4}$$

3c) Soit $n \geq 2$.

D'après la question 1:

$$P_2(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P_2(E_n)$$

D'après la question précédente: $P_2(E_n) = \frac{3-2p}{4}$

Donc $P_2(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \left(\frac{3-2p}{4}\right) = \frac{8p + (1-2p)(3-2p)}{8}$

Donc:

$$\forall n \geq 2, P_2(F_n) = \frac{4p^2 + 3}{8}$$

Ex 2p4

4. Soit $n \geq 2$.

$$P_2(F_n) - P_1(F_n) = \frac{4p^2+3}{8} - \frac{2p+1}{4}$$

$$= \frac{4p^2+3-4p-2}{8}$$

$$= \frac{4p^2-4p+1}{8}$$

$$= \frac{(2p-1)^2}{8} > 0 \text{ car } p > \frac{1}{2} \text{ donc } 2p-1 > 0.$$

donc $2p-1 \neq 0$.

Donc : $\begin{cases} \forall n \geq 2, P_2(F_n) > P_1(F_n) \\ P_2(F_1) = P_1(F_1) \end{cases}$

La stratégie 2 est donc strictement meilleure que la stratégie 1.

5) a) Le premier lancer s'effectue dans les mêmes conditions que pour les stratégies précédentes:

$$P_3(F_1) = \frac{2p+1}{4}.$$

Le second lancer s'effectue dans les mêmes conditions qu'avec la stratégie 2:

$$P_3(F_2) = \frac{4p^2+3}{8}$$

Ex 2 p 5.

b) Soit $n \geq 1$.

Avec cette stratégie, les deux pièces ont une probabilité non nulle d'être choisies au n^{e} tirage :

C'est évident si $n=1$, et si $n \geq 2$, cela découle du fait que, quelque soit la pièce choisie au $n-1^{\text{e}}$ tirage, les deux pièces peuvent être choisies avec probabilité non nulle au n^{e} tirage (les deux pièces peuvent faire pile et face).

Donc $P_3(E_n) \neq 0$ et $P_3(\bar{E}_n) \neq 0$.

Par la formule des probabilités totales appliquée au S/E $(E_n, \bar{E}_n)$:

$$P_3(E_{n+1}) = P_3(E_n) P_3(E_{n+1} | E_n) + P_3(\bar{E}_n) P_3(E_{n+1} | \bar{E}_n).$$

Or, vu la stratégie 3 :

(i) $P_3(E_{n+1} | E_n)$ est la probabilité de faire face au n^{e} tirage ... : Sachant qu'on tire la pièce équilibrée donc :

$$P_3(E_{n+1} | E_n) = \frac{1}{2}.$$

(ii) $P_3(E_{n+1} | \bar{E}_n) = 1-p$ (probabilité de faire pile avec la pièce déséquilibrée).

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_3(E_{n+1}) &= \frac{1}{2} P_3(E_n) + (1-p) P_3(\bar{E}_n) \\ &= \frac{1}{2} P_3(E_n) + (1-p)(1 - P_3(E_n)) \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right) P_3(E_n) + (1-p). \end{aligned}$$

Posons $a = p - \frac{1}{2}$ et $b = 1-p$.

$p \in]\frac{1}{2}, 1[$ donc $a \in]0, \frac{1}{2}[\subset]0, 1[$:

On a bien trouvé $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \geq 1, P_3(E_{n+1}) = a P_3(E_n) + b.$$

Ex 2p6

c) $(P_3(E_n))_{n \geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique
la méthode usuelle donne (à faire!)

$$\forall n \geq 1, P_3(E_n) = a^{n-1} \left(P_3(E_1) - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

$$\forall n \geq 1, P_3(E_n) = a^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

d) Soit $n \geq 1$ ("faute" sans incidence. l'énoncé le demandait pour $n \geq 2$).

Par la question 1 :

$$P_3(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p \right) P_3(E_n).$$

Par la question précédente, avec $a = p - \frac{1}{2}$ et $b = 1-p$:

$$\begin{aligned} P_3(E_n) &= \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1-p}{1-(p-\frac{1}{2})} \right) + \frac{1-p}{1-(p-\frac{1}{2})} \\ &= \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{2-2p}{3-2p} \right) + \frac{2-2p}{3-2p} \\ &= \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n-1} \times \frac{3-2p-4+4p}{2(3-2p)} + \frac{2-2p}{3-2p} \\ &= \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n-1} \times \frac{2p-1}{2} \times \frac{1}{3-2p} + \frac{2-2p}{3-2p} \\ &= \left(\frac{2p-1}{2} \right)^n \times \frac{1}{3-2p} + \frac{2-2p}{3-2p} \\ &= \frac{1}{3-2p} \left(\left(\frac{2p-1}{2} \right)^n + 2-2p \right) \end{aligned}$$

Ex 2 p 7

Alors:

$$P_3(E_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P_3(E_n)$$

$$= p - \frac{2p-1}{2} P_3(E_n)$$

$$= p - \frac{2p-1}{2} \times \frac{1}{3-2p} \left(\left(\frac{2p-1}{2}\right)^n + 2-2p \right)$$

$$= p - \frac{2p-1}{2} \times \frac{2-2p}{3-2p} - \frac{2p-1}{2} \times \frac{1}{3-2p} \left(\frac{2p-1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3-2p} \left(p(3-2p) - (2p-1)(1-p) - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$P_3(E_n) = \frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right), \text{ et ce pour tout } n \geq 1.$$

6. a)

$\forall n \geq 1$:

$$\frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right) - \frac{4p^2+3}{8} = \frac{1}{8(3-2p)} \left(8 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} - (4p^2+3)(3-2p) \right)$$

Or:

$$\begin{aligned} 8 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} - (4p^2+3)(3-2p) &= 8 + 8p^3 - 12p^2 + 6p - 9 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \\ &= 8p^3 - 12p^2 + 6p - 1 - \frac{8(2p-1)^3}{2^3} \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n-2} \\ &= (2p-1)^3 - (2p-1)^3 \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{Car } (2p-1)^3 = \binom{3}{0} (2p)^3 + \binom{3}{1} (2p)^2 \times (-1) + \binom{3}{2} 2p \times (-1)^2 + \binom{3}{3} (-1)^3$$

$$= 8p^3 - 12p^2 + 6p - 1.$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 121 \\ 1331 \end{array}$$

Ex 2p8

Finalement:

$\forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n+1} \right) - \frac{4p^2+3}{8} &= \frac{1}{8(3-2p)} \left((2p-1)^3 - (2p-1)^3 \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) \\ &= \frac{(2p-1)^3}{8(3-2p)} \left(1 - \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-2} \right), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

b) Si $n=1$ ou $n=2$: $IP_3(F_n) = IP_2(F_n)$, par S.a).

Si $n \geq 3$, $0 < p - \frac{1}{2} < 1$ donc par croissance stricte de $t \mapsto t^{n-2}$ sur $\mathbb{R}_+$ ($n-2 \geq 1$):

$$0 < \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-2} < 1.$$

$$\text{Donc } 1 - \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-2} > 0.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} (2p-1)^3 > 0 & (\text{car } 2p > 1) \\ 3-2p > 0 & (\text{car } p < 1 \text{ donc } 3-2p > 1) \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{(2p-1)^3}{8(3-2p)} \left(1 - \left(p - \frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) > 0.$$

D'après la question précédente: $IP_3(F_n) - IP_2(F_n) > 0$.

Donc pour tout $n \geq 1$, $IP_3(F_n) \geq IP_2(F_n)$ et l'inégalité est stricte si $n \geq 3$: la stratégie 3 est strictement meilleure que la 2.

Exercice 3

1. Poser les calculs : on trouve

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

$$JK = KJ = O_3$$

$$K^2 = O_3$$

2. On a $J^2 = K$, donc $J^3 = KJ = O_3$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall n \geq 3, \quad J^n &= J^{n-3} J^3 \quad (\text{car } n-3 \geq 0) \\ &= J^{n-3} \times O_3 \\ &= O_3. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } J^0 = I_3, J^1 = J, J^2 = K \text{ et } \forall n \geq 3, J^n = O_3$$

3. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls, donc est inversible par théorème.

b) (Rq : vous pouvez faire une récurrence).

$$\text{Pour } n=0, \quad I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K = I = L^0.$$

$$\text{Pour } n=1, \quad I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K = I + J + 0 \cdot K = L^1.$$

Soit $n \geq 2$, montrons l'égalité voulue.

$IJ = JI = J$ donc par la formule du binôme de Newton :

Ex 3 p 2

$$L^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k}.$$

Si $n=2$, on a de suite :

$$L^n = \binom{n}{0} I^n + \binom{n}{1} J I^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 I^{n-2}$$

$$= I + n J + \frac{n(n-1)}{2} K$$

car $\begin{cases} J^2 = I_3 \\ J^2 = K \end{cases}$

Si $n > 2$:

$$L^n = \binom{n}{0} I^n + \binom{n}{1} J I^{n-1} + \binom{n}{2} J^2 I^{n-2} + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k}$$

$$= I + n J + \frac{n(n-1)}{2} K + \sum_{k=3}^n 0_3 \quad (\text{car } \forall k \geq 3, J^k = 0_3)$$

Dans tous les cas :

$$L^n = I + n J + \frac{n(n-1)}{2} K.$$

c) Soit A une matrice inversible et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ donc A^{-n} est inversible en tant que puissance (positive) d'une matrice inversible.

On sait alors :

$$\left((A^{-1})^n \right)^{-1} = \left((A^{-1})^{-1} \right)^n = A^n.$$

$$\text{Donc } (A^{-n})^{-1} = A^n.$$

Ainsi, A^{-n} est inversible et $(A^{-n})^{-1} = A^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(et pour toute matrice inversible A).

d) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, la relation voulue a déjà été démontrée question b).

Supposons donc $n < 0$ et montrons $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$.

Posons $k = -n$. Par 3c), $(L^n)^{-1} = (L^{-k})^{-1} = L^k$ donc $L^n = (L^k)^{-1}$.

Montrons que $I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K = (L^k)^{-1}$.

$$\begin{aligned} L^k \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \right) &\stackrel{(A)}{=} \left(I + kJ + \frac{k(k-1)}{2}K \right) \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \right) \\ &\stackrel{(A*)}{=} \left(I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K \right) \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \right) \\ &= \underline{I} + \underline{nJ} + \frac{n(n-1)}{2}K - \underline{n^2J^2} + \frac{n^2(n-1)}{2}JK \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{2}KI + \frac{n^2(n+1)}{2}KJ + \frac{n^2(n+1)(n-1)}{2}K^2 \end{aligned}$$

(A): car $k \in \mathbb{N}$

(A*): car $k = -n$.

Or, $JK = KJ = K^2 = 0$ et $J^2 = K$. Ainsi:

$$\begin{aligned} L^k \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \right) &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K - n^2K + \frac{n(n+1)}{2}K \\ &= I + \left(\frac{n}{2}(n-1+n+1) - n^2 \right)K \\ &= I \end{aligned}$$

Ceci montre $I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K = (L^k)^{-1}$, et on a vu $L^n = (L^k)^{-1}$,

d'où: $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$, et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ex 3p4.

4. D'après 3d):

$$L^{-1} = I - J + \frac{(-1)(-1)}{2} K \\ = I - J + K$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La forme matricielle de l'équation $P \cdot X = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, est:

$$(S): \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 5x_2 - x_3 = y_1 + 2y_2 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ -3x_3 + x_3 = -y_1 + 2y_3 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 5x_2 - x_3 = y_1 + 2y_2 \\ 2x_3 = -2y_1 + 6y_2 + 10y_3 \quad L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

Le système triangulaire obtenu est à coefficients diagonaux non nul donc (S) est de Cramer.

Par théorème, P est inversible.

Ex 3p5

6. a)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
P = [[2, 1, 1], [-1, 2, -1], [1, -1, 1]]
P = np.array(P)
J = np.zeros((3, 3))
J[0, 1], J[1, 2] = 1, 1
A = np.dot(P, J)
A = np.dot(A, al.inv(P))
print(A)
```

b) Montrons par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n): "A^n = P J^n P^{-1}"$$

Initialisation: $A^0 = I_3$ et $P J^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1}$
 $= P P^{-1}$
 $= I_3$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = A^n \times P J P^{-1} \\ &= P J^n P^{-1} \times P J P^{-1} \quad (\text{par } P(n)) \\ &= P J^n I_n J P^{-1} \\ &= P J^{n+1} P^{-1}, \quad \text{d'où } P(n+1), \\ &\quad \text{d'où l'hérédité.} \end{aligned}$$

On a bien montré, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P J^n P^{-1}$.

Ex 3 p 6

c) Soit $n \geq 3$.

$J^n = O_3$ d'après la question 2, donc avec la question précédente :

$$\underline{A^n = P J^n P^{-1} = P O_3 P^{-1} = O_3, \text{ et ce pour tout } n \geq 3.}$$

7. a) Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} E(t) E(t') &= \left(I_3 + tA + \frac{t^2}{2} A^2 \right) \left(I_3 + t'A + \frac{t'^2}{2} A^2 \right) \\ &= I_3 + t'A + \frac{t'^2}{2} A^2 + tA I_3 + (tA)(t'A) + (tA)\left(\frac{t'^2}{2} A^2\right) \\ &\quad + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^2}{2} A^2 (t'A) + \frac{t^2}{2} A^2 \left(\frac{t'^2}{2} A^2\right). \end{aligned}$$

Or, $A^3 = A^4 = O_3$, on a donc :

$$\begin{aligned} E(t) E(t') &= I_3 + (t+t')A + \left(\frac{t^2}{2} + tt' + \frac{t'^2}{2} \right) A^2 \\ &= I_3 + (t+t')A + \frac{t^2 + 2tt' + t'^2}{2} A^2 \\ &= I_3 + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2} A^2 \\ &= E(t+t'). \end{aligned}$$

On a bien :

$$\underline{\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t) E(t') = E(t+t').}$$

Ex 3 p 7.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

D'après la question précédente :

$$E(t)E(1-t) = E(t+(1-t)) = E(1) = I_3.$$

Ainsi, $E(1-t)$ est inverse à droite de la matrice carrée $E(t)$.

Par l'écrit, $E(t)$ est inversible et $E(t)^{-1} = E(1-t)$.

$$\text{Donc : } E(t)^{-1} = I_3 - tA + \frac{(1-t)^2}{2}A.$$

Donc : $E(t)$ est inversible, et :

$$E(t)^{-1} = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A,$$

et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c) On procède en deux temps :

Soit $t \in \mathbb{R}$.

(i) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, E(t)^n = E(nt)$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : E(t)^n = E(nt)$.

$$\text{Initialisation : } E(t)^0 = I_3 \text{ et } E(0t) = E(0) = I_3 + 0_3 + 0_3 = I_3.$$

Donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} E(t)^{n+1} &= E(t)^n E(t) \\ &= E(nt) E(t) \quad \text{par } P(n) \\ &= E(nt+t) \quad \text{par 7a)} \\ &= E((n+1)t). \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$, et on a l'hérédité.

Ex 3p8

Par récurrence, on a donc montré:

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(nt) = E(t)^n, \text{ et ce pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $E(nt) = E(t)^n$ par ce qui précède.

Si non: $n < 0$, donc $-n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Par définition, } E(t)^n &= (E(t)^{-1})^{-n} && (E(t) \text{ est inversible par 7b)} \\ &= (E(-t))^{-n} && \text{par 7b)} \end{aligned}$$

Par le résultat précédent appliqué en $-t$ et en $-n \in \mathbb{N}$:

$$E(-t)^{-n} = E((-n)(-t)) = E(nt).$$

$$\text{Donc } E(t)^n = E(nt).$$

Finalement, la relation $E(t)^n = E(nt)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ex 4p 1

EXERCICE 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $-n \in \mathbb{R}$.

Par produit, $x \mapsto \frac{-n}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition avec l'exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto e^{-n/x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, par produit avec la fonction continue $x \mapsto x$:

$x \mapsto x e^{-n/x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f_n coïncide avec la fonction continue $x \mapsto x e^{-n/x}$ sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $\frac{-n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ ($-n < 0$).

Par composition, $e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (car $e^t \rightarrow 0$ $t \rightarrow -\infty$).

Par produit, $x e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Or, f_n coïncide avec $x \mapsto x e^{-n/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un voisinage de 0^+ : on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

f_n étant définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

f_n est donc continue en 0.

f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0 donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

Ex 4p2

2 a) $x \mapsto e^x$, $x \mapsto -\frac{n}{x}$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur leur domaine.
Par composition puis produit, $x \mapsto x e^{-n/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (argument non exigible : car elle coïncide sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$ avec une fonction dérivable).

$$\forall x > 0, f_n'(x) = e^{-n/x} + x \times \frac{n}{x^2} e^{-n/x}$$

$$\forall x > 0, f_n'(x) = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-n/x}.$$

$$b) \forall x > 0, f_n'(x) = e^{-n/x} + \frac{n}{x} e^{-n/x}.$$

Or, $-\frac{n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc par composition :

$$e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

De plus, par croissance comparée : $t e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.

$$\text{Par composition : } -\frac{n}{x} e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc par combinaison linéaire de limites :

$$e^{-n/x} + \frac{n}{x} e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 + 0 = 0.$$

$$\text{Finalement : } f_n'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc f_n est dérivable en 0 et $f_n'(0) = 0$.

Ex 6p3

2c)

$-\frac{n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc par composition:

$$e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1.$$

Par produit: $x e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}$ donc:
 $\mathbb{R}_+^*$ est un voisinage de $+\infty$

$$\boxed{f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$$

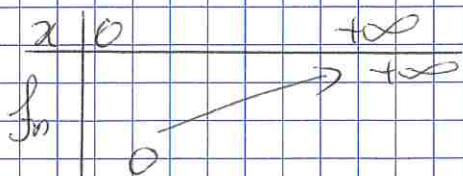
$$d) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = \begin{cases} (1 + \frac{n}{x}) e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or, } \forall x > 0, \begin{cases} 1 + \frac{n}{x} > 1 > 0 \\ e^{-\frac{n}{x}} > 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall x > 0, f_n'(x) > 0.$$

$$f_n'(0) = 0$$

f_n' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en un nombre fini de points,
donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Ex 4 p 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$3a) \quad \forall x > 0, \quad \frac{f_n(x)}{x} = e^{-n/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc si C_n admet une asymptote en $+\infty$, celle-ci a pour pente 1.

De plus,

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f_n(x) - x &= x(e^{-n/x} - 1) \\ &= -n \times \left(-\frac{x}{n}\right) (e^{-\frac{n}{x}} - 1) \\ &= -n \frac{e^{-\frac{n}{x}} - 1}{\left(-\frac{n}{x}\right)}. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \\ -\frac{n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

donc par composition:

$$\frac{e^{-\frac{n}{x}} - 1}{\left(-\frac{n}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Finalement: } f_n(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -n.$$

Donc C_n admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D_n d'équation: $y = x - n$.

b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def Trace(n):
```

```
    listeX = np.linspace(0, 100, 500)
```

```
    liste f = [x + np.exp(-n/x) for x in listeX]
```

```
    liste D = listeX - n # utilisation du type array
```

```
    plt.plot(listeX, liste f, label="Cn")
```

```
    plt.plot(listeX, liste D, label="Dn")
```

```
    plt.legend()
```

```
    plt.show()
```


Ex 4p5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) f_n est continue ($q \circ 1$) et strictement croissante ($q \circ 2d$) sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de la bijection monotone, f_n induit une bijection $\mathbb{R}_+ \rightarrow f_n(\mathbb{R}_+) = [f_n(0), \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)] = \mathbb{R}_+$.

$1 \in \mathbb{R}_+$, donc 1 admet un unique antécédent par f_n .

il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(1) = 1 - e^{-n} \quad \text{et } -n < 0 \text{ donc } e^{-n} < e^0 = 1.$$

$$\text{Donc } f_n(1) < 1 = f_n(u_n).$$

$$(1, u_n) \in (\mathbb{R}_+)^2.$$

Par croissance stricte de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

$$\underline{1 < u_n}.$$

$$\text{De plus, } u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$$

$$\text{donc } \ln(u_n e^{-\frac{n}{u_n}}) = \ln(1)$$

$$\text{donc } \ln(u_n) + \ln(e^{-\frac{n}{u_n}}) = 0$$

$$\text{d'où } \ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0 \quad \text{puis:}$$

$$u_n \ln(u_n) = n$$

Finalement: $u_n > 1$ et $u_n \ln(u_n) = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 6.6

h) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \ln(x) - 1$$

$$\forall x > 0, g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \text{ et } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Donc le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
g		$\searrow$	$\nearrow$

$\frac{1}{e} < 1$ donc g est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$g(u_n) = n < g(u_{n+1}) = n+1$$

$$(u_n, u_{n+1}) \in [\frac{1}{e}, +\infty[$$

donc par croissance stricte, $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Par limite monotone, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Supposons par l'absurde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par un réel M .

On aurait $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(u_n) \leq g(M)$ (croissance de g)

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq g(M)$.

C'est absurde (ajoutez votre argument préféré ici :

" $\mathbb{N}$ n'est pas majoré", ou "c'est faux pour $n = \lfloor g(M) \rfloor + 1$ ",

ou encore "on aurait $g(M) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par comparaison,

" $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ".

Ex 4 p 7

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante non majorée :

$$\begin{array}{l} u_n \longrightarrow +\infty \\ n \longrightarrow +\infty \end{array}$$

5a) Soit $n \geq 3$.

$$n > e \approx 2,7 \text{ donc } \ln(n) > 1, \\ \text{donc } n \ln(n) > n.$$

$$\text{Ainsi : } g(n) > g(u_n).$$

Par croissance stricte de g sur $[1, +\infty[$:

$$u_n \leq n$$

Donc $u_n \leq n$, et ce pour tout $n \geq 3$.

b) $u_{100} \in [1, 100]$ par les questions précédentes.

De plus, u_{100} est l'unique solution de l'équation $g(x) = 100$ sur $[1, 100]$.

Donc l'approximation obtenue par dichotomie sur $[1, 100]$ d'une solution de $g(x) = 100$ sera une approximation de u_{100} .

```
import numpy as np
def g(x):
    return (x*np.log(x))
a, b = 1, 100
while abs(b-a) > 10**(-3):
    m = (a+b)/2
    if g(m) < 100:
        a = m
    else:
        b = m
print((a+b)/2)
```


Ex 4 p 8

6-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \ln(u_n) = n \text{ donc } \ln(u_n \ln(u_n)) = \ln(n) \\ u_n \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\}$$

$$\text{Or, } u_n > 1 \text{ donc } \left. \begin{array}{l} u_n \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(u_n) \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\}$$

On a bien : $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrons que $\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \quad (u_n > 1 \text{ donc } \ln(u_n) \neq 0)$$

$$\text{Or, } \left. \begin{array}{l} \frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissance comparée} \\ \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (car } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ par lc) et} \\ \text{par composition)} \end{array} \right\}$$

Donc composition :

$$\frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{D'où : } \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } \left(\frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

sont équivalentes

Ex 4 pg

(1) Montrer que : $\frac{u_n}{\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Soit $n \geq 2$.

$$u_n \ln(u_n) = n \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{n}{\ln(u_n)}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{u_n}{\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)} = \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Donc $(u_n)_n$ et $\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)_n$ sont équivalentes.

Ex Sp)

1. Lors du premier tirage, chaque boule est tirée de manière équiprobable et l'urne contient n boules dont r rouges.

$$IP(R_1) = \frac{r}{n}$$

$$\text{Ainsi, } IP(\bar{R}_1) = 1 - \frac{r}{n}.$$

2) $(R_1, \bar{R}_1)$ forme un système complet d'événements,

$$\text{et } \begin{cases} IP(R_1) \neq 0 & (r \neq 0) \\ IP(\bar{R}_1) \neq 0 & (r \neq n \text{ c'est-à-dire } r \neq 0) \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales:

$$IP(R_2) = IP(R_1) IP_{R_1}(R_2) + IP(\bar{R}_1) IP_{\bar{R}_1}(R_2).$$

Or, $IP_{R_1}(R_2) = \frac{r+1}{n+1}$ car si R_1 est réalisé, l'urne contient $n+1$ boules dont $r+1$ sont rouges au second tirage.

$$\text{De même, } IP_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{r}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } IP(R_2) &= \frac{r}{n} \times \frac{r+1}{n+1} + \left(1 - \frac{r}{n}\right) \frac{r}{n+1} \\ &= \frac{r}{n+1} \left(\frac{r+1}{n} + 1 - \frac{r}{n} \right) = \frac{r}{n+1} \times \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$IP(R_2) = \frac{r}{n}$$

Ex Sp2

3a) À l'issue du k -ième tirage, on a tiré entre 0 et k boules rouges depuis le début de l'expérience (tout les cas étant possibles).

Donc le nombre de boules rouges dans l'urne a été augmenté d'une valeur entre 0 et k , tous les cas étant possibles.

Ainsi:

$$\begin{cases} \forall i \in [r, r+k], IP([r_k = i]) \neq 0 \\ \forall i \in \mathbb{N} \setminus [r, r+k], IP([r_k = i]) = 0 \end{cases}$$

b) D'après ce qui a été dit en 3a), le nombre de boules présentes dans l'urne à l'issue du k ^e tirage est entre r et $r+k$.

Donc:
$$\bigcup_{i=r}^{r+k} [r_k = i] = \Omega.$$

De plus, les événements $[r_k = r], \dots, [r_k = r+k]$ sont deux à deux incompatibles (le nombre de boules rouges dans l'urne ne peut valoir à la fois i et j si $i \neq j$).

Donc $[r_k = r], [r_k = r+1], \dots, [r_k = r+k]$ forme un système complet d'événements.

c) D'après les résultats des deux questions précédentes, on peut appliquer la formule de probabilités totales avec conditionnement.

$$IP(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} IP([r_k = i]) IP_{([r_k = i])}(R_{k+1}).$$

Or, $\forall i \in [r, r+k], IP_{([r_k = i])}(R_{k+1}) = \frac{i}{n+k}$

(car si $[r_k = i]$ est réalisé, le $k+1$ ^e tirage se fait avec $n+k$ boules

Ex 3

dont exactement i rouges).

$$\text{Alors: } IP(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} \frac{i}{n+k} IP(\tau_k = i)$$
$$\text{d'où: } = \frac{1}{n+k} \sum_{i=r}^{r+k} i IP(\tau_k = i)$$

$$(n+k) IP(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} i IP(\tau_k = i)$$

d) Soit $i \in (r, r+k]$.

$\tau_k = i$ n'est pas impossible (question 1), donc
 $\tau_k = i \cap R_{k+1}$ non plus (chaque tirage ayant une probabilité non nulle d'amener une boule rouge).

$IP(\tau_k = i \cap R_{k+1}) \neq 0$ donc par la formule des probabilités composées :

$$IP(\tau_k = i \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}) = IP(\tau_k = i) IP_{\tau_k = i}(R_{k+1}) IP_{\tau_k = i \cap R_{k+1}}(R_{k+2})$$

$$\text{Or, } IP_{\tau_k = i}(R_{k+1}) = \frac{i}{n+k}$$

et si $\tau_k = i$ et R_{k+1} sont réalisés, le $k+2^{\text{e}}$ tirage se fait avec $i+1$ boules rouges :

$$IP_{\tau_k = i \cap R_{k+1}}(R_{k+2}) = \frac{i+1}{n+k+1}$$

$$\text{On a donc bien: } IP(\tau_k = i \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)} IP(\tau_k = i)$$

ExSpl

De même; $(r_k=i) \cap \bar{R}_{k+1}$ est de probabilité non nulle donc par les probabilités composées.

$$P((r_k=i) \cap \bar{R}_{k+1} \cap R_{k+2}) = P(r_k=i) P(\bar{R}_{k+1} | R_{k+2}) P(R_{k+2})$$

$$\text{Or, } P(\bar{R}_{k+1} | R_{k+2}) = 1 - P(R_{k+1} | R_{k+2})$$

$$= 1 - \frac{i}{n+k}$$

$$= \frac{n+k-i}{n+k} \quad \text{et}$$

$$P((r_k=i) \cap \bar{R}_{k+1} \cap R_{k+2}) = \frac{i}{n+k+1}$$

Finalement :

$$\forall i \in \{0, n+k\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} P((r_k=i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)} P(r_k=i) \\ P((r_k=i) \cap \bar{R}_{k+1} \cap R_{k+2}) = \frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)} P(r_k=i) \end{array} \right.$$

e) $(r_k=r), \dots, (r_k=r+k)$ forme un système complet d'événements donc (probabilités totales).

$$P(R_{k+2}) = \sum_{i=r}^{r+k} P((r_k=i) \cap R_{k+2})$$

$(R_{k+1}, \bar{R}_{k+1})$ forme un S.E donc :

$$\forall i \in \{0, r+k\}, \quad P((r_k=i) \cap R_{k+2}) = P((r_k=i) \cap R_{k+2} \cap R_{k+1}) + P((r_k=i) \cap R_{k+2} \cap \bar{R}_{k+1})$$

Exsps.

Ces deux résultats donnent.

$$P(R_{k+2}) = \sum_{i=r}^{k+r} P(\tau_k = i \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}) + P(\tau_k = i \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2})$$

j) D'après les deux derniers résultats.

$$\begin{aligned} P(R_{k+2}) &= \sum_{i=r}^{k+r} \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)} P(\tau_k = i) + \frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)} P(\tau_k = i) \\ &= \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \sum_{i=r}^{k+r} i(i+1 + n+k-i) P(\tau_k = i) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \times (n+k+1) \sum_{i=r}^{r+k} i P(\tau_k = i)$$

$$(\text{par 3c}) = P(R_{k+1})$$

$$\text{Donc } P(R_{k+2}) = P(R_{k+1})$$

4) D'après les questions précédentes.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(R_{k+2}) = P(R_{k+1}).$$

Autrement dit : $\forall k \geq 2, P(R_{k+1}) = P(R_k)$.

Donc $(P(R_k))_{k \geq 2}$ est constante :

$$\forall k \geq 2, P(R_k) = P(R_2) = \frac{r}{n} = P(R_1).$$

Finalement, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(R_k) = \frac{r}{n}$. Un résultat simple surprenant à priori.

