

Chapitre 16 : Dérivation

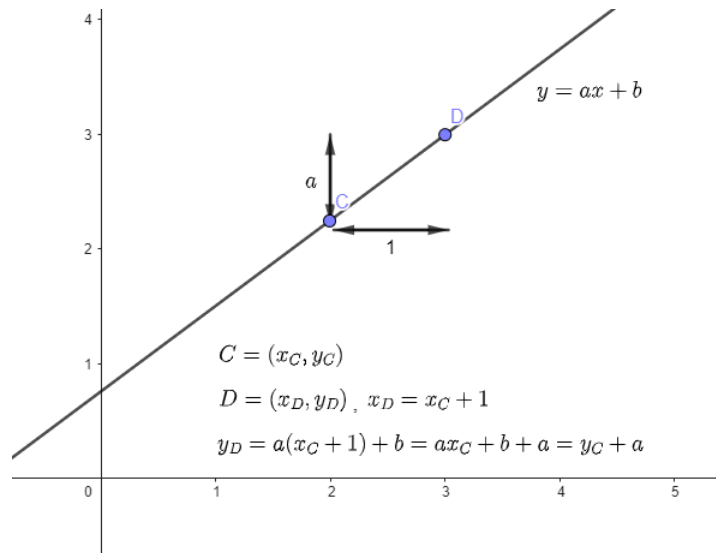
ECG1 A, Lycée Hoche

I. Notion de fonction dérivable

1. Pente, taux d'accroissement

Définition 1. Soient a et b deux réels. Considérons la droite d non verticale d'équation cartésienne $y = ax + b$. On dit que a est **la pente**, ou **le coefficient directeur** de d .

Remarque. La pente d'une droite non verticale représente la variation d'ordonnée obtenue en se déplaçant de 1 en abscisse. Pour cette raison, on dit généralement qu'une droite verticale (donc, d'équation $x = c$) admet une pente de $+\infty$.

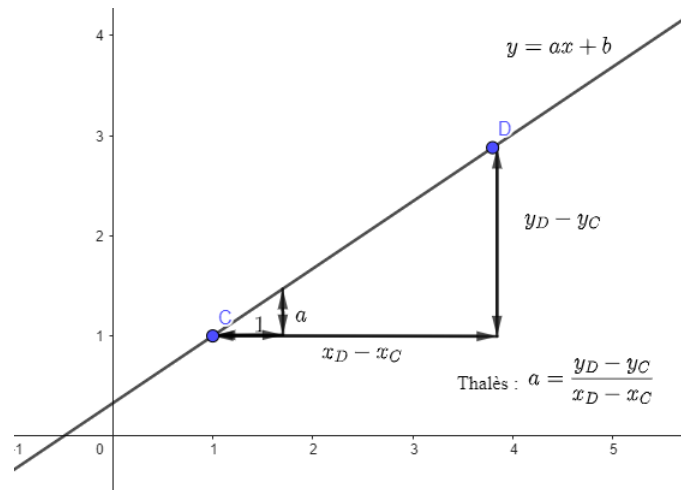


Proposition 2. Soient C et D deux points distincts d'une droite non verticale, d'équation $y = ax + b$. Alors, la pente a de cette droite est :

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

où $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$.

Cette proposition est une conséquence du théorème de Thalès.

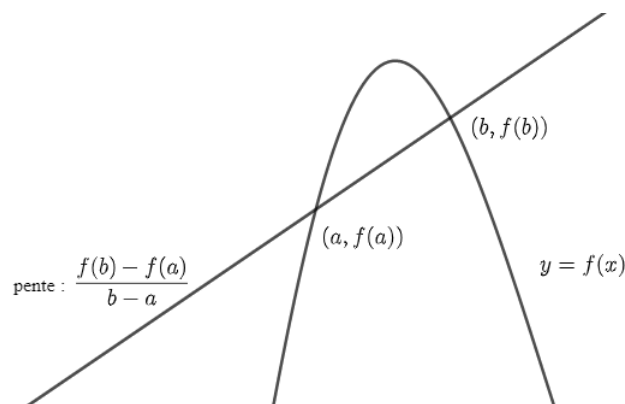


Ceci explique la définition suivante.

Définition 3. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient a et b deux éléments distincts de I . On appelle **taux d'accroissement de f entre a et b** le réel :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque. Le taux d'accroissement de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points du graphe de f d'abscisses a et b .



Remarque. L'ordre de a et b ne compte pas dans la définition ci-dessus, car :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Autrement dit, le taux d'accroissement de f entre a et b est aussi le taux d'accroissement de f entre b et a .

2. Nombre dérivé

Considérons le taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ d'une fonction f entre deux points a et b . Plus b est proche de a , plus la droite envisagée par ce taux d'accroissement se rapproche de ce qu'on veut appeler la tangente de la courbe de f au point a .

Définition 4. Soit I un intervalle et f une fonction réelle définie sur un I . Soit $a \in I$. On dit que f **est dérivable en a** si le taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ admet une limite finie quand b tend vers a .

Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé de f en a** le réel noté $f'(a)$ donné par :

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque. Sous réserve d'existence, le nombre dérivé de f en a est donc la pente de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$.

Remarque. Au lieu de considérer la limite de $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ lorsque b tend vers a , on considère généralement la limite de $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Cela donne une caractérisation équivalente de la dérivabilité, car pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

On procède alors au changement de variable $h = b - a$ dans un sens, et $b = a + h$ dans l'autre.

Proposition 5. Dans le contexte de la définition ci-dessus, il est équivalent de dire:

(i) f est dérivable en a ,

(ii) la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas,

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Démonstration. Voir remarque ci-dessus. $\square$

Exemple 6. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, le monôme $f_n : t \mapsto t^n$ est dérivable en x , et

$$f'_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

(ii) Considérons la fonction racine carrée donnée par $r(x) = \sqrt{x}$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors r est dérivable en x , et

$$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction r n'est pas dérivable en 0, et

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{0}}{b - 0} = +\infty.$$

Proposition 7. La valeur des limite suivantes est admise :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$$

Remarque. Ces limites donnent directement :

- (i) La dérivabilité de l'exponentielle en 0, et la valeur de son nombre dérivé en 0 : $\exp'(0) = 1$.
- (ii) La dérivabilité du logarithme en 1, et $\ln'(1) = 1$.

Exemple 8. Dans cet exemple, on utilise les propriétés de morphisme de l'exponentielle et du logarithme pour démontrer leur dérivabilité à partir des limites admises ci-dessus.

- (i) La fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$ est dérivable en tout réel x , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$$

- (ii) La fonction logarithme $g : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable en tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 9. Soit I un intervalle, f une fonction réelle définie sur I et $a \in I$. On suppose dans (i) que f est définie sur un voisinage à droite de a , et dans (ii) que f est définie sur un voisinage à gauche de a .

- (i) On dit que f est **dérivable à droite** en a si la limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé à droite de f en a** le réel

$$f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- (ii) On dit que f est **dérivable à gauche** en a si la limite $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé à gauche de f en a** le réel

$$f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque. La dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction définie uniquement à gauche (resp. à droite) de a n'est pas envisageable. Par exemple, étudier la dérivabilité à gauche de la racine carrée en 0 n'a pas de sens.

D'après les propositions correspondantes sur les limites :

Proposition 10. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I , et $a \in I$. On suppose que f est définie sur un voisinage de a . Alors, il est équivalent de dire :

- (i) f est dérivable en a
 - (ii) f est dérivable à droite et à gauche en a , et $f'_d(a) = f'_g(a)$.
- Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration. Résulte immédiatement de la proposition caractérisant les limites de fonctions à l'aide des limites à droite et à gauche (voir chapitre "limites de fonctions"). $\square$

Proposition 11. Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in I$.

- (i) On suppose que f n'est définie que sur un voisinage à droite de a (a est donc la borne inférieure de I). Alors, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a , et dans ce cas :

$$f'(a) = f'_d(a).$$

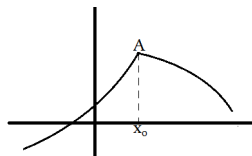
- (ii) On suppose que f n'est définie que sur un voisinage à gauche de a (a est donc la borne supérieure de I). Alors, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a , et dans ce cas :

$$f'(a) = f'_g(a).$$

Démonstration. Similaire à la proposition précédente (d'après une propriété correspondante sur les limites). $\square$

Exemple 12. La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 si et seulement si elle est dérivable à droite en 0.

Remarque. (Et définition :) On dit que la courbe de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **point anguleux** en $a \in I$ si f est dérivable à droite et à gauche en a , mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$. Dans ce cas, f n'est pas dérivable en a .



Exemple 13. $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0, mais n'est pas dérivable en 0 : 0 est un point anguleux car $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Remarque. À partir de maintenant et pour toute la suite du chapitre, les intervalles considérés seront non vide et non réduit à un point.

4. Tangente en un point

Définition 14. Soit I un intervalle. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a , on appelle **tangente à la courbe de f en a** la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

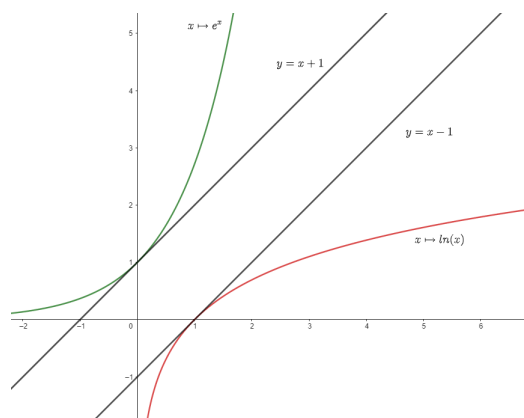
Remarque. Sous réserve d'existence, la tangente de la courbe de f en a est l'unique droite de pente $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$. C'est comme ça qu'on retient bien cette formule : la pente de la droite donnée est clairement $f'(a)$, et cette droite passe clairement par $(a, f(a))$.

Exemple 15. (i) La tangente à courbe de la fonction exponentielle en 0 est la droite d'équation :

$$y = x + 1$$

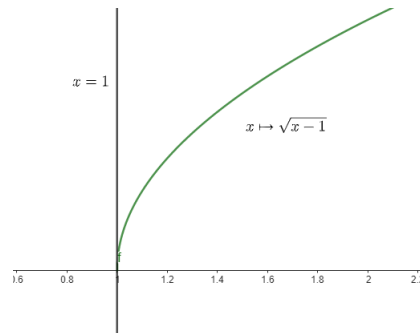
(ii) La tangente à courbe de la fonction logarithme en 1 est la droite d'équation :

$$y = x - 1$$



Définition 16. Soit I un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que la courbe de f admet une **tangente verticale en a** si :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \pm\infty.$$



Exemple 17. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.

5. Lien avec la continuité

Proposition 18. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Cela permet de justifier, si besoin est, la dérivabilité des fonctions rencontrées, et d'obtenir d'emblée leur continuité.

Remarque. La fonction partie entière n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0 par contraposée.

6. Développement limité à l'ordre 1

La notion de développement limité à l'ordre 1 en un point a d'une fonction dérivable formalise l'approximation de cette fonction par la fonction affine donnant sa tangente.

Définition 19. Soit I un intervalle, soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On appelle **développement limité de f à l'ordre 1 en a** la donnée de réels α, β et d'une fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

- (i) $\forall x \in I, f(x) = \alpha + \beta(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$
- (ii) $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Un résultat particulièrement important est le suivant.

Proposition 20. Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Il est équivalent de dire :

- (i) f est dérivable en a , et
- (ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Dans ce cas, f admet un unique développement limité à l'ordre 1 en a , donné par :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$$

où $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Si f est dérivable en a , on peut donc légitimement invoquer "le développement limité à l'ordre 1 de f en a ".

Remarque. L'énoncé ne dit pas "qui est ϵ ", mais que si f est dérivable en a , alors la fonction ϵ de ce développement limité existe et est unique. Elle est explicitée dans la démonstration.

Remarque. Dans l'égalité $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$, on reconnaît :

- (i) la formule de la tangente $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$, additionnée à
- (ii) la fonction $x \mapsto (x - a)\epsilon(x)$ qui est le produit de $x \mapsto (x - a)^1$ par une fonction qui tend vers 0 en a (c'est donc une fonction qui tend vers 0 "plus vite" que $x \mapsto (x - a)^1$ en a , d'où la terminologie de développement limité "à l'ordre 1").

7. Fonction dérivée

Définition 21. Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. On dit que f *est dérivable sur* D si f est dérivable en tout point x de D .

Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction

$$f' : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{cases}.$$

Remarque. Pour vérifier qu'une fonction est dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$, nous utiliserons généralement les propositions de la partie suivante. Dans les autres cas, on reviendra à la définition (en considérant le taux d'accroissement), et on ne considèrera que les dérivabilité à gauche ou à droite pour les bornes du domaine d'étude.

Remarque. La considération d'une *partie* D dans la définition précédente permet de définir ces notions pour, par exemple, des réunions d'intervalles.

Exemple 22. Montrons que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Exemple 23. Si $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'_n(x) = nx^{n-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée de la fonction inverse et d'un monôme.

Exemple 24. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée.

Exemple 25. Toute fonction constante est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée la fonction nulle.

Voici un **Tableau récapitulatif** des dérivées déjà rencontrées.

Fonction	Dérivée	Domaine
$x^n, n \in \mathbb{N}$		
$x^n, n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$		
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		
$\sqrt{x}$		
e^x		
$\ln(x)$		

Remarque. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$: la 4e ligne est un cas particulier de la 3e.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

1. Combinaisons linéaires, produit et quotient

Proposition 26. Soient f et g deux fonctions dérivables sur une partie D de $\mathbb{R}$. Alors :

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur D , et

$$\forall x \in D, (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

On dit que la dérivation est linéaire (elle est compatible avec les combinaisons linéaires).

(ii) La fonction fg est dérivable sur D , et

$$\forall x \in D, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Si de plus g ne s'annule pas sur D , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D , et

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Démonstration. Combinaison linéaire et produit à noter. Le quotient sera traité plus tard, à l'aide de l'inverse (de manière indépendante). $\square$

En pratique, on utilise donc la proposition suivante :

Proposition 27. Toute combinaison linéaire, tout produit ou tout quotient de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions est dérivable sur son domaine de définition.

Exemple 28. Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction dérivée d'un polynôme est donnée par le polynôme dérivé.

2. Composition

Proposition 29. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en $x \in I$ et si g est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Démonstration. A noter. $\square$

En pratique, on utilise :

Proposition 30. Toute composée (bien définie) de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions est dérivable sur son domaine de définition.

Exemple 31. Étudions la dérivabilité des fonctions :

(i) $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x^2)$,

(ii) $f_2 : x \mapsto (x^3 - 1)^n$.

Remarque. Attention, la fonction racine carrée est une fonction courante, qui est définie et non dérivable en 0. Ainsi, les propositions ci dessus permettent de justifier la dérivabilité d'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ uniquement en les points x tels que $f(x) \neq 0$.

Exemple 32. Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

Exemple 33. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g : x \mapsto f(x)^n$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, g'(x) = n f(x)^{n-1} \times f'(x).$$

Cette formule est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}_-$ si f ne s'annule pas, et pour $n = 0$, g est la fonction constante égale à 1 donc est dérivable de dérivée nulle.

Exemple 34. Si une fonction f est dérivable et non nulle sur I , alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Démonstration. Terminons la démonstration de la proposition 8 : démontrons la formule donnant la dérivée d'un quotient. $\square$

3. Dérivation de la réciproque d'une fonction bijective (HP)

Proposition 35. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction réelle bijective. Soit $x \in I$ tel que f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$. Alors, $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable en $y = f(x)$, et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. La dérivabilité de f^{-1} est admise (mais accessible, à condition d'admettre sa continuité, comme pour le théorème de la bijection). La méthode utilisée pour trouver la formule est très instructive.

Démonstration de la formule : à noter. $\square$

Remarque. La méthode vue dans la démonstration est à connaître, mais ce résultat est hors programme.

Une conséquence simple :

Proposition 36. Si une fonction bijective est dérivable sur son domaine de définition, et si sa dérivée ne s'annule pas, alors sa fonction réciproque est dérivable sur son domaine de définition.

4. Tableau récapitulatif

Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables.

Opération	Nombre dérivé en x	Conditions supplémentaires de dérivabilité
$\alpha u + \beta v, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$		
uv		
$u^n, n \in \mathbb{Z}$		
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		
$\frac{u}{v}$		
$\sqrt{u}$		
e^u		
$\ln(u)$		
$u \circ v$		
u^{-1}		

Exercice 37. Déterminer le domaine de dérivabilité et les dérivées des fonctions données par :

$(i) \ f(x) = a^x, \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*,$

$(ii) \ g(x) = \ln(e^{3x} + 4x^2)$

$(iii) \ h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$

5. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 38. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et n un entier.

- (i) On dit que f est n fois dérivable sur I si l'on peut dériver n fois successivement la fonction f sur l'intervalle I . Dans ce cas, on note $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivée n -ième de f sur I . Par convention, on note $f^{(0)} = f$, et $f'' = f^{(2)}$.
- (ii) On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur l'intervalle I , et si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .
- (iii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n . L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque. Ainsi, une fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I si et seulement si f et f' sont dérivables sur I , et si de plus f'' est continue sur I .

Remarque. Attention à ne pas oublier la condition de continuité de $f^{(n)}$ sur I pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Toute fonction dérivable sur I y étant continue, si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors les fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues et dérivables sur I , et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I .

Remarque. Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors pour tout entier n , $f^{(n)}$ est bien définie et continue sur I . Et c'est une équivalence.

Remarque. Pour une définition plus formelle, la suite de fonctions $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, sous réserve de dérivabilité.

Exemple 39. La fonction exponentielle, notée ici f , est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f' = f$. Une récurrence immédiate montre alors que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = f.$$

Proposition 40. (i) Les fonctions polynômiales, les fractions rationnelles, l'exponentielle et le logarithme sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines de définition.

(ii) La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (cet énoncé inclut la racine carrée).

(iii) Sous réserve de bonne définition, toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient et toute composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur leur domaine de définition est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur son domaine de définition.

Remarque. Les démonstrations se font par récurrence, et sont sans surprises.

Remarque. On peut donc utiliser le même schéma de rédaction pour le caractère $\mathcal{C}^n$ d'une fonction que pour la continuité et la dérivabilité.

Exemple 41. Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$ et montrer que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Remarque. Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ est simplement une fonction continue.

Passons aux formules permettant de calculer des dérivées n -ièmes :

Proposition 42. Soit n un entier naturel. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I . Alors,

(i) La fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

(ii) La fonction fg est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Démonstration. À noter. $\square$

On conséquence directe :

Proposition 43. *Le produit et la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors les fonctions $f^{(k)}$ sont toutes continues et les formules précédentes montrent donc que les fonctions $(f+g)^{(n)}$ et $(fg)^{(n)}$ sont continues, par opérations. $\square$

Exemple 43. Voici quelques méthodes classiques liées aux dérivées n -ièmes.

(i) Soit $f : x \mapsto xe^x$, soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est n fois dérivable et déterminer $f^{(n)}$.

(ii) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine D_g , et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D_g, g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(iii) Soit $h : x \mapsto x^2 e^{2x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que h est n fois dérivable et déterminer $h^{(n)}$.

III. Le théorème des accroissements finis, causes et conséquences

Chaque théorème de cette partie est un des grand théorème de l'analyse réelle.

1. Extrema locaux et dérivation

Définition 44. Soit D une partie (non vide) de $\mathbb{R}$. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in D$.

(i) On dit que f admet un **maximum local** en a si :

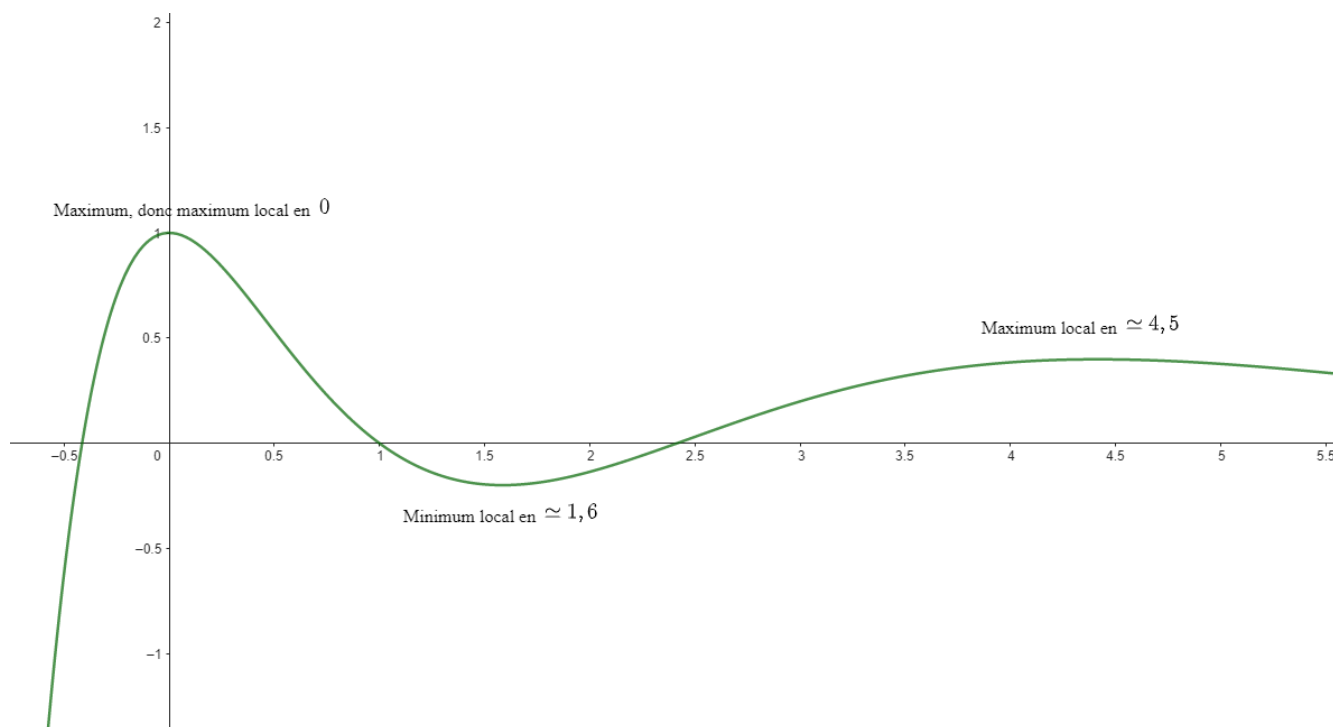
$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]a - \delta, a + \delta[, f(x) \leq f(a).$$

(ii) On dit que f admet un **minimum local** en a si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]a - \delta, a + \delta[, f(x) \geq f(a).$$

(iii) On dit que f admet un **extremum local** en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a .

Remarque. Si f admet un maximum (resp. minimum) en a sur D , alors a fortiori f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a .



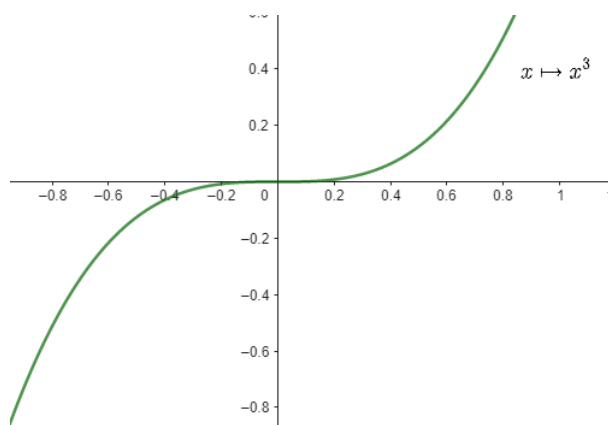
Proposition 45. (Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.) Soit I un intervalle. Soient f une fonction réelle définie sur I et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I . On suppose f dérivable en a .
Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Remarque. La condition " a n'est pas une extrémité de I " est nécessaire. Par exemple, $f : x \mapsto x$ admet un minimum en 0 sur l'intervalle $[0, 1]$, mais $f'(0) = 1$. Dessin à noter.

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. L'interprétation graphique est importante : en un maximum local "intérieur" à I , la courbe de f admet une tangente horizontale (sa pente est nulle).

Remarque. Cette proposition donne une condition **nécessaire mais pas suffisante** pour avoir un extremum local. Exemple : $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local de cette fonction sur $\mathbb{R}$.



Remarque. Une condition suffisante sera donnée plus bas, à l'aide du théorème des accroissements finis.

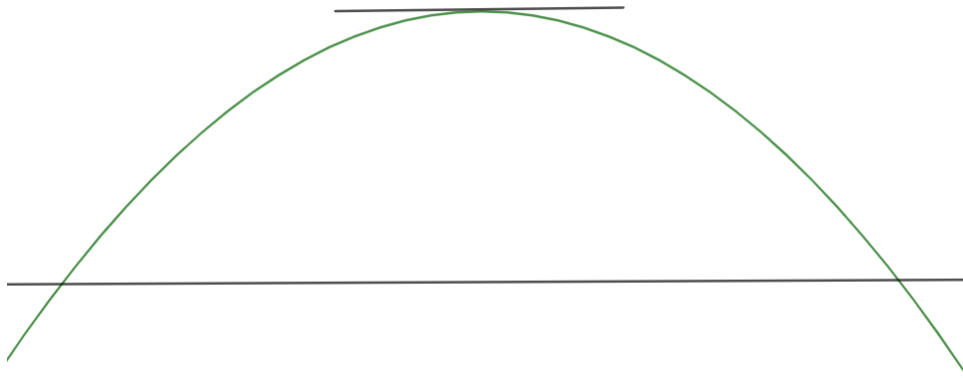
2. Le lemme de Rolle (HP)

Cet énoncé est légèrement hors programme et vous ne devriez pas être interrogé dessus, mais il est essentiel pour comprendre le cours dans sa continuité.

Proposition 46. (Lemme de Rolle.) Soit I un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

Démonstration. En annexe. $\square$

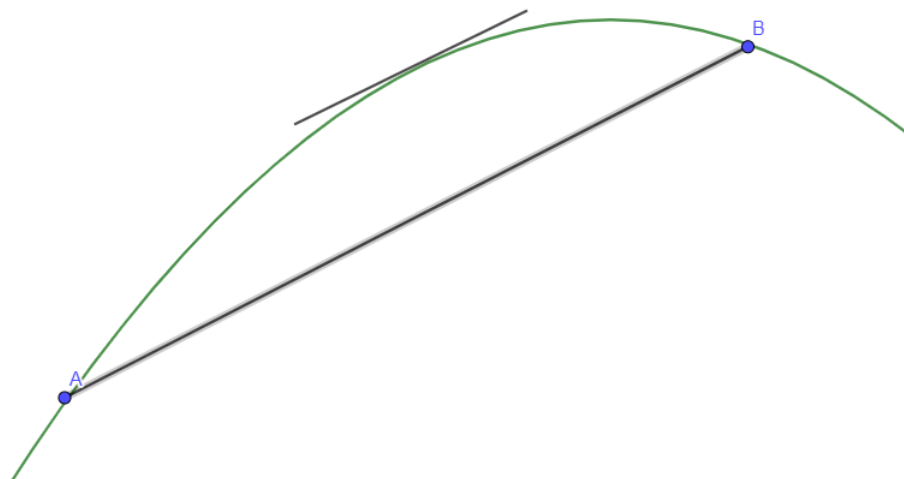


3. Le théorème des accroissements finis (HP)

Voici le théorème des accroissements finis.

Théorème 47. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



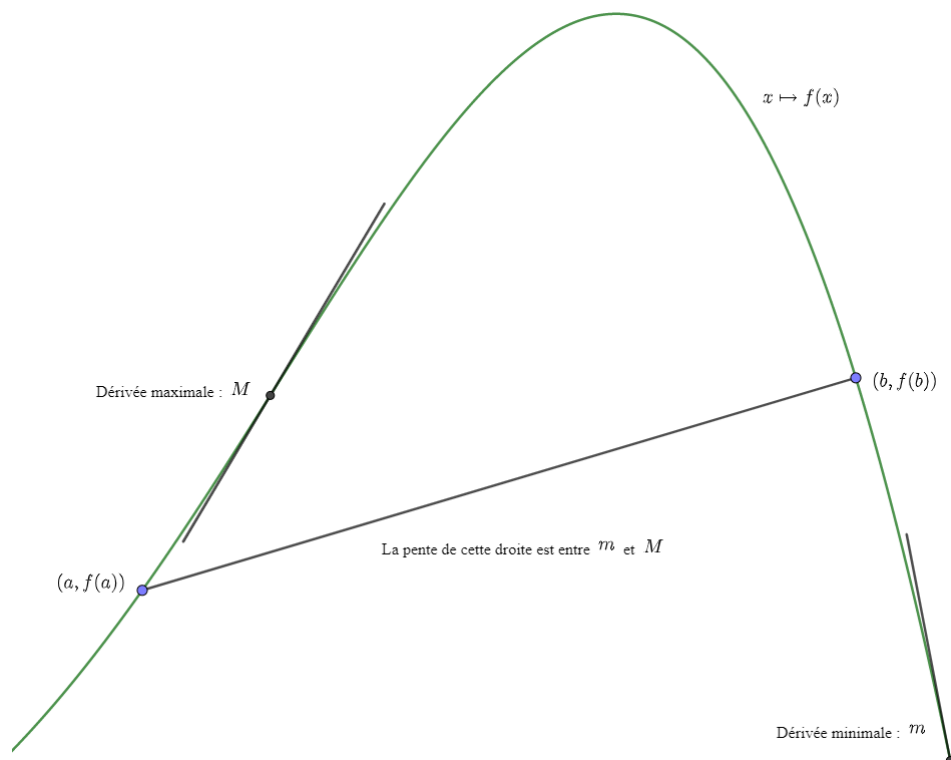
Démonstration. En annexe. $\square$

Remarque. C'est une version "penchée" du lemme de Rolle, et c'est exactement ce que traduit la démonstration.

Remarque. Ce théorème remarquable dit que, sous les hypothèses de continuité et de dérivabilité données, tout taux d'accroissement est une valeur prise par la fonction dérivée.

4. L'inégalité des accroissements finis

Ce théorème et son corollaire au programme formalisent le fait suivant : si la fonction dérivée de f est majorée par M et minorée par m sur un intervalle, alors tous les taux d'accroissements de f sur cet intervalle sont majorés par M et minorés par m .



Proposition 48. (Inégalité des accroissements finis, version "HP")

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Supposons donnés deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M,$$

alors :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Remarque. Si on ne sait que majorer ou que minorer la dérivée, on peut tout de même conclure à une inégalité. Plus précisément, si m est un minorant de f' sur $]a, b[$, alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(avec les notations de l'énoncé).

Démonstration. A noter. $\square$

Voici la version explicitement au programme, aux hypothèses simplifiées :

Proposition 49. (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Supposons donné un réel k tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Démonstration. A noter. $\square$

L'inégalité des accroissements finis est un outil remarquable pour démontrer des inégalités. Pour cela, il faut apprendre à "reconnaitre des taux d'accroissement".

Exemple 50. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exemple 51. Montrer que si a et b sont des réels tels que $a \leq b \leq -1$, alors

$$e^b - e^a \leq \frac{b-a}{e}$$

5. Applications de l'IAF à la monotonie.

Le lien entre la monotonie et la dérivée d'une fonction se démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 52. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Alors :

- (i) La fonction f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- (ii) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- (iii) La fonction f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration. A noter. Bien remarquer que seule l'implication "si f' est positive alors f est croissante" utilise l'IAF. $\square$

Remarque. Attention : la proposition devient complètement fausse si on ne se place pas sur un intervalle. Penser à $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Pour la monotonie stricte, la "vraie" condition équivalente est plus subtile et n'est pas donnée. On se contente de cet énoncé.

Proposition 53. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$).

Si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante sur I).

Démonstration. A noter. $\square$

Remarque. Ainsi, on pourra justifier que f est strictement croissante sur I en vérifiant que l'inégalité $f'(x) > 0$ est vraie pour tout $x \in I$ sauf en un nombre fini de points (où la dérivée s'annulera dans ce cas - admis et non trivial dans le cas général). Et idem pour la stricte décroissante (avec $f'(x) < 0$).

Exemple 54. Cette proposition est utilisée depuis le début de l'année.

Exemple 55. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6. Une condition suffisante d'extremum local

Proposition 56. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I , et soit $a \in I$.
 Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .
 Autrement dit, s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

- (i) $f'(a) = 0$,
- (ii) $\forall x \in I \cap]a - \delta, a], f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$),
- (iii) $\forall x \in I \cap [a, a + \delta[, f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$),

alors f admet un extremum local en a .

Remarque. Cette proposition justifie que le tableau de variation fait bien apparaître les extrema locaux de f .

Remarque. Dans le contexte de la proposition, si f' passe de négative à positive en a , alors f admet un minimum local en a , et dans l'autre cas c'est un maximum local en a . Le tableau de variation rend cela très clair.

Démonstration. A noter. $\square$

Exemple 57. Déterminons les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - x$.

7. Accroissements finis et étude de suites

Voici des démarches très classiques où l'on utilise l'inégalité des accroissements finis pour démontrer des résultats de convergence sur des suites.

Exemple 58. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Préparation à l'utilisation de l'IAF)
- (ii) Montrer qu'il existe un unique réel positif ϕ tel que $f(\phi) = \phi$. (On introduit un point fixe de f)
- (iii) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}$. (On utilise l'IAF)
- (iv) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}$. (On itère la relation précédente, avec une récurrence)
- (v) Montrer que : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi$. (Et on conclut!)
- (vi) On prends $u_0 = 1$. Écrire un code Python fournissant une approximation à 10^{-6} près de ϕ .

Voici une autre version classique suivant une démarche proche, version "séries".

Exemple 59. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Idem)
- (ii) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_n - u_{n-1}|}{2}$ (On utilise l'IAF et la question précédente)
- (iii) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$ (Encore une fois, on itère la relation précédente)
- (iv) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge (On passe par la convergence absolue pour utiliser la question précédente)

- (v) En déduire que u converge. (*Routinier, série télescopique*)
- (vi) Déterminer la limite de u . (*Ici, on doit trouver les (le) points fixes de f , avec l'argument d'unicité de la limite*)

IV. Annexe

1. Exemple 12 (ajout)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrons que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et déterminons f' .

Dérivabilité sur $]0, +\infty[$.

$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition, $x \mapsto e^{-1/x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $x \mapsto x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme, $g : x \mapsto xe^{-1/x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x} \times \frac{1}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-1/x}.$$

Comme pour la continuité, le transfert de la propriété de dérivabilité "par formule" (c'est-à-dire, en disant que deux fonctions coïncident) n'est valable que sur des intervalles ouverts. La raison est la même : les propriétés liées aux limites ne se transfèrent bien que sur les intervalles ouverts.

Enfin, f coïncide sur l'intervalle **ouvert** $]0, +\infty[$ avec la fonction dérivable $g : x \mapsto xe^{-1/x}$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-1/x}.$$

Dérivabilité en 0

f ayant pour domaine $[0, +\infty[$, f est dérivable en 0 si et seulement si elle est dérivable à droite en 0.

Or,

$$\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^{-1/x}.$$

$$-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \text{ donc par composition } (e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0), \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

Conclusion f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et : $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2. Formule de Leibniz (prop. 42 (ii)) : le calcul

Le début de la démonstration a été vu en classe.

Nous en étions à :

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
 &= \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) \right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &= f^{(n+1)}(x) g(x) + \left(\sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(n-j+1)}(x) \right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &= f^{(n+1)}(x) g(x) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \right) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &= f^{(n+1)}(x) g(x) + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \right) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &= f^{(n+1)}(x) g(x) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \right) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)
 \end{aligned}$$

Justifications : pour vous, ce sont exactement les mêmes que pour la formule du binôme de Newton à partir de la 3e égalité.

Ceci termine bien la récurrence !

3. Démonstration de la proposition 46 (Lemme de Rolle)

Soit I un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé.

Premier cas : Si f est constante sur $]a, b[$, alors sa dérivée est identiquement nulle sur $]a, b[$. Donc en posant par exemple $c = (a + b)/2$, on montre bien l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Second cas : Sinon, f est non constante.

f étant continue sur le segment $[a, b]$, f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$ d'après le théorème des bornes atteintes.

Notons $m = \min_{[a, b]}(f)$ et $M = \max_{[a, b]}(f)$.

f étant non constante sur $[a, b]$, $m \neq M$ (pour cette affirmation, montrer la contraposée).

Alors, $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$.

Premier sous cas : si $f(a) \neq m$. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $m = f(x_0)$. Alors, $x_0 \neq a$ (car $f(a) \neq f(x_0) = m$) et $x_0 \neq b$ (car $f(b) = f(a) \neq f(x_0)$).

Donc $x_0 \in]a, b[$.

Ainsi, f est dérivable sur $]a, b[$, admet un minimum local (car global) en x_0 et x_0 n'est pas une extrémité de $]a, b[$. Par condition nécessaire d'extrémum local, $f'(x_0) = 0$.

Ceci montre : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Second sous cas : si $f(a) \neq M$, on fait un raisonnement similaire à celui du premier sous cas en remplaçant m par M .

Dans tous les cas, on a bien montré :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

D'où le résultat.

4. Démonstration de la proposition 47 (Théorème des accroissements finis)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé.

$$\text{Soit } g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{cases}.$$

$$\text{On a } g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

De plus, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en tant que combinaison linéaire des fonctions f et $x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ (fonction affine) qui le sont.

D'après le lemme de Rolle, on dispose de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\text{Mais } g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ceci montre donc le résultat.

5. Démonstration de la proposition 52

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Alors :

(i) La fonction f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

(ii) La fonction f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

(iii) La fonction f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Soit I un intervalle (on rappelle que dans ce chapitre, les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point).

(i) Montrons d'abord qu'une fonction f dérivable sur I est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

Soit f une fonction (définie et) dérivable sur I .

(a) Supposons f croissante, montrons : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

Soit $x \in I$.

Premier cas : si x n'est pas la borne supérieure de I .

Alors I est un voisinage à droite de x (en exercice facultatif : revenir à la définition de voisinage à droite et faire deux cas selon que la borne supérieure de I est réelle ou $+\infty$).

Soit $\delta > 0$ tel que $]x, x + \delta[\subset I$. Posons $V =]x, x + \delta[$.

$\forall y \in V, f(y) \geq f(x)$ (car f croissante sur $I, V \subset I$ et $\forall y \in V, y \geq x$).

Donc : $\forall y \in V, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$ (quotient de réels positifs, et $y \neq x$ ici).

V est un voisinage à droite de x donc, sous réserve d'existence, par passage à la limite des inégalités :

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Mais f étant dérivable en x , elle est dérivable à droite en x donc $\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existe et

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'_d(x) = f'(x).$$

On a donc montré $f'(x) \geq 0$.

Second cas : sinon, x est la borne supérieure de I . $V = I \setminus \{x\}$ est un voisinage à gauche de x , et on procède de même de l'autre côté :

$$\forall y \in V, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \text{ (quotient de négatifs et } y \neq x \text{ ici)}$$

Donc cette fois, par passage à la limite (pour $y \rightarrow x^-$):

$$f'(x) = f'_g(x) \geq 0$$

Conclusion : Dans tous les cas, $f'(x) \geq 0$. Ceci est donc vrai pour tout $x \in I$, d'où le résultat.

(b) Réciproquement, supposons : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et montrons que f est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$, montrons $f(x) \leq f(y)$. Si $x = y$, le résultat est clair. Supposons donc $x < y$.

f est dérivable sur I , et $[x, y] \subset I$. Donc f est continue sur $[x, y]$ (car dérivable) et dérivable sur $]x, y[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on dispose de $c \in]x, y[$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$.

$c \in I$ et on a supposé $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$. Donc $f'(c) \geq 0$.

Enfin, $y - x \geq 0$ car $y \geq x$ donc : $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ (produit de réels positifs).

Donc $f(x) \leq f(y)$.

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$, on a bien montré que f est croissante sur I .

On a bien montré qu'une fonction f dérivable sur I est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

(ii) Soit maintenant g une fonction dérivable sur I . Montrons que g est décroissante si et seulement si : $\forall x \in I, g'(x) \leq 0$.

On pose $f = -g$.

On montre sans peine :

- g est décroissante sur I si et seulement si f est croissante sur I .
- f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = -g'(x)$.

donc d'après le premier cas:

$$g \text{ décroissante sur } I \iff f \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0 \iff \forall x \in I, -g'(x) \geq 0 \iff \forall x \in I, g'(x) \leq 0$$

On a donc bien montré le second énoncé.

- (iii) Une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante : l'énoncé (iii) est une conséquence des deux précédents.

6. Démonstration de la proposition 53

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$).

Si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante sur I).

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé (cas $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$).

Par la proposition 52, f est donc croissante sur l'intervalle I .

Pour démontrer l'implication voulue, on procède par contraposée. Supposons que f n'est pas strictement croissante sur I : on dispose d'éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$.

Par croissance de f sur I : $\forall x \in [a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b) = f(a)$.

Donc :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = f(a) = f(b).$$

f est donc constante sur $[a, b]$, donc : $\forall x \in [a, b], f'(x) = 0$.

Ainsi, f' s'annule sur $[a, b]$, qui est un ensemble infini car $a < b$.

On a donc montré que si f n'est pas strictement croissante, alors f' s'annule en une infinité de points, d'où le résultat voulu par contraposée.

7. Démonstration de la proposition 56

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I , et soit $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .

Autrement dit, s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$(i) \quad f'(a) = 0,$$

$$(ii) \quad \forall x \in I \cap]a - \delta, a], f'(x) \geq 0 \text{ (resp. } f'(x) \leq 0),$$

$$(iii) \quad \forall x \in I \cap [a, a + \delta[, f'(x) \leq 0 \text{ (resp. } f'(x) \geq 0),$$

alors f admet un extremum local en a .

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé, on dispose d'un réel $\delta > 0$ tel que :

$$(i) \quad f'(a) = 0,$$

$$(ii) \quad \forall x \in I \cap]a - \delta, a], f'(x) \geq 0,$$

$$(iii) \quad \forall x \in I \cap [a, a + \delta[, f'(x) \leq 0,$$

Montrons que f admet un maximum local en a (avec les autres hypothèses, on trouverait un minimum local).

D'après l'hypothèse (ii), f est croissante sur $I \cap]a - \delta, a]$. Mais pour tout $y \in I \cap]a - \delta, a]$, on a $y \leq a$.

Donc par croissance:

$$\forall y \in I \cap]a - \delta, a], f(y) \leq f(a).$$

D'après l'hypothèse (iii), f est décroissante sur $I \cap [a, a + \delta[$. Mais pour tout $y \in I \cap [a, a + \delta[$, on a $y \geq a$.

Donc par décroissance:

$$\forall y \in I \cap [a, a + \delta[, f(y) \leq f(a).$$

Enfin, $I \cap]a - \delta, a + \delta[= (I \cap]a - \delta, a]) \cup (I \cap [a, a + \delta[)$ donc :

$$\forall y \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, f(y) \leq f(a).$$

Par définition, f admet un maximum local en a ($\delta > 0$).