Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°16 : Dérivation

2024-2025
Mathématiques

Pour commencer

Calculs de dérivée

Exercice 1 Calculer, en utilisant les règles usuelles, les dérivées des fonctions suivantes, en précisant si besoin est sur quel(s) intervalle(s) elles sont effectivement dérivables (on mettra, si possible, les résultats sous une forme permettant d'étudier "facilement" leur signe):

(a) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(b) $f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$

(c) $f(x)=\left(x^2-1\right)\sqrt{4-x^2}$

(d) $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$

(e) $f(x)=\sqrt{2-\ln x}$

(f) $f(x)=e^x-e\ln x$

(g) $f(x)=(x+\ln x)e^{x-1}$

(h) $f(x)=x^n\ln(1+x)$

(i) $f(x)=e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)$

(j) $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

(k) $f(x)=x+1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

(l) $f(x)=(\ln x)^2$

(m) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(n) $f(x)=\frac{x\ln x-1}{x}$

(o) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

(p) $f(x)=x^{\ln x}$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-e}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}$

(d) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(e) $\lim_{x\to e}\frac{x\ln x-e}{x-e}$

(f) $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}^*$ tel que f soit dérivable en a.

Déterminer, si possible, $\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$ et $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}$.

Exercice 4 Déterminer l'équation de la tangente en a à la courbe représentative des fonctions ci-dessous :

(a) $f(x)=e^x, a=0.$

(b) $f(x)=x\sqrt{x+1}, a=0.$

(c) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right), a=2$

(d) $f(x)=\ln(1+x), a=0.$

(e) $f(x)=x^3-5x^2+1, a=-2.$

(f) $f(x)=x^x, a=1$

Exercice 5 Dans chacune des situations suivantes, déterminer la dérivée de $g\circ f$, en précisant domaine de définition et domaine de dérivabilité :

(a) $f(x)=e^{-x}$ et $g(x)=\sqrt{1+x}$

(b) $f(x)=e^x$ et $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$

(c) $f(x)=x^2$ et $g(x)=x\ln x-x$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

(e) $f(x)=e^x$ et $g(x)=\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$

(f) $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\sqrt{x}$

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=f(-x)$. Exprimer g' en fonction de f'.

(b) On suppose que f est paire. Que peut-on dire de f' ?

(c) On suppose que f est impaire. Que peut-on dire de f' ?

Exercice 7 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $P(x)=x^4+4x^3+6x^2+8x+1$.

Déterminer les extrema locaux de P sur $\mathbb{R}$.

Études de dérivabilité

Exercice 8 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \frac{x|x|}{2}$.

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f calculer $f'(x)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(b) Étudier la dérivabilité de f' sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f(x) = x^x$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 . La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1+x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que f' n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 On considère la fonction $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\ln(1-|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 .

Que retrouve-t-on pour les fonctions définies par $f(x) = e^x - 1$ et $f(x) = \ln(1+x)$?

Dérivées successives

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction logarithme népérien.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f^{(n)}(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$.

Exercice 16 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{ax+b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

(b) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x-1}{(x+1)(2x-1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{2x-1}$ pour tout $x \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto \frac{x-1}{(x+1)(2x-1)}$.

Exercice 17

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^n \end{array} \right.$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $f^{(k)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2(1+x)^n \end{array} \right.$. Déterminer $g^{(n)}$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = (1+x)^{2n}$.

Déterminer $h^{(n)}$ de deux manières distinctes et en déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Études de suites récurrentes

Exercice 19 Soit $f : [1, +\infty[$ la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$.

(*a*) (*i*) Montrer que pour tout $x \geq 1, f(x) \geq 1$ et résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[1, +\infty[$.

(*ii*) Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \geq 1$.

(*iii*) Étudier le sens de variations de f' puis donner un encadrement de f' sur $[1, +\infty[$.

(*b*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(*i*) Vérifier par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

(*ii*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4} |u_n - 1|$.

(*iii*) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1|$ et déterminer enfin $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 20 On considère la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = 3 - \sqrt{4x + 5}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \sqrt{4u_n + 5}$.

(*a*) (*i*) Montrer que pour tout $x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$.

(*ii*) Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution $\alpha \in [0, 1]$.

(*iii*) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(*iv*) Montrer que pour tout $x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{9}{10}$.

(*b*) (*i*) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone?

(*ii*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.

(*iii*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{9}{10} |u_n - \alpha|$.

(*iv*) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

(*v*) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur exacte de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Pour continuer

Calculs de dérivées

Exercice 21 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$.

Exercice 22 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f et g sont monotones sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ est monotone sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = x^4 + x^3 - x + 1$.

Montrer que P admet un unique extremum local et en déduire que P n'admet pas de racine réelle.

Exercice 24 Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $[0, 1]$.

Études de dérivabilité

Exercice 25 On considère la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

(*a*) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et prolonger si possible f par continuité aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

(*b*) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

(*c*) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'(0) = 0$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 26

(*a*) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 . La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $g(x) = \frac{x^n}{e^x - 1}$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 . La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 27

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \ln(1+|x|)$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \ln(1+x|x|)$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 28 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(a) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer f'.

(c) Étudier la continuité de f' sur son domaine.

Exercice 29 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x > a$, on pose $f(x) = (x-a)^{ax}$.

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en a.

(b) Étudier la dérivabilité en a de la fonction prolongée (que l'on note toujours f).

Dérivées successives

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x)$.

Exercice 31 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^{\alpha x} \end{array} \right.$. Déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Études de suites récurrentes

Exercice 32 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et montrer que f est paire sur $\mathcal{D}_f$. Étudier les variations de f.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera ℓ et que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

(c) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

(iii) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 33 Soit $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x > -1$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

(a) (i) Montrer que pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$.

(ii) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$, notée α.

(iii) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout $x \in [0,1], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0,1]$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(iii) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.