Programme de colle n^o 22 : Séries numériques (fin), Dérivabilité (début).

Semaine du lundi ***24 mars****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Début du chapitre

22.1 Se reporter au programme de colle précédent.

Séries à termes positifs et convergence absolue

22.2 Notion de séries à termes positifs. Une série à termes positifs $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de ses sommes partielles est majorée, et dans ce cas $S_n \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ pour tout $n \geq n_0$.

22.3 Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

22.4 Séries absolument convergentes. Toute série absolument convergente est convergente.

Dérivation

22.5 Pente d'une droite non verticale. Taux d'accroissement d'une fonction entre deux points de son domaine. Nombre dérivé d'une fonction en un point de son domaine.

Les élèves doivent avoir compris le petit changement de variable nous faisant indifféremment considérer $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *lorsque* $b \to a$*, ou* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *lorsque* $h \to 0$.

22.6 Limites admises : $\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ et $\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$. Dérivabilité de l'exponentielle et du logarithme en tout point de leur domaine.

22.7 Dérivabilité à gauche ou à droite d'une fonction en un point, nombre dérivé à gauche ou à droite d'une fonction en un point. Caractérisations de la dérivabilité en a avec les dérivabilités à gauche ou à droite en a (deux cas possible, selon que a est une borne du domaine de définition de la fonction envisagée ou non). Notion de point anguleux.

22.8 Tangente en un point de dérivabilité (rappel). Notion de tangente verticale.

22.9 Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

22.10 Notion de développement limité à l'ordre 1 d'une fonction en un point de son domaine. Une fonction f est dérivable en un point a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, forme et unicité du développement limité dans ce cas.

22.11 Dérivabilité et fonction dérivée sur une partie D de $\mathbb{R}$. Combinaisons linéaires, produit et quotient de fonctions dérivables sur une partie D de $\mathbb{R}$. Toute combinaison linéaire, tout produit ou tout quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition est dérivable sur son domaine de définition.

22.12 Dérivabilité et composition. Toute composée de fonctions dérivables sur leur domaine est dérivable sur son domaine de définition.

22.13 Dérivation des bijection réciproque : dérivabilité (sous condition) admise, méthode permettant de calculer (sous réserve d'existence) $(f^{-1})'$ à retenir.

Résultat complètement HP, seule la méthode est à retenir.

Dérivées successives

22.14 Fonctions n fois dérivables. Notion de fonction de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Notations $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Élèves : cette partie est valable en remplaçant I par une réunion d'intervalles.

22.15 Les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle, le logarithme sont dérivables sur leur domaine. $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient et toute composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur leur domaine est de classe

$\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur son domaine.

22.16 Dérivée n-ième d'un combinaison linéaire, d'un produit de fonctions n fois dérivables (formule de Leibniz).

Python

22.17 Représentations informatiques des graphes, par la matrice d'adjacence ou par la liste des adjacences (terminologie officielle : liste des listes d'adjacences). Exemple : cas des graphes complets d'ordre n. Détermination des degrés (degrés entrants et sortants dans le cas orienté - attention aux boules dans le cas non orienté) des sommets avec ces représentations.

Quelques questions de cours

1. Énoncer et démontrer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge. Montrer que la série de Riemann de paramètre α converge pour tout $\alpha \geq 2$.
3. Définir la notion de série absolument convergente. Que dire de la nature d'une série absolument convergente? Le démontrer.
4. Montrer que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la limite admise.
5. Montrer que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, et déterminer f'.
6. Définir la notion de développement limité à l'ordre 1 d'une fonction en un point de son domaine. Énoncer la proposition (20) caractérisant la dérivabilité à l'aide de cette notion. Montrer que toute fonction f admettant un développement limité à l'ordre 1 en $a \in D_f$ est dérivable en a, et que dans ce cas, son développement limité est de la forme donnée par la proposition 20.
7. Énoncer la proposition (26) relative aux combinaisons linéaires, aux produits et aux quotients de fonctions dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$. Montrer l'énoncé relatif au produit.
8. Énoncer et démontrer la proposition (29) relative à la dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables.
9. Énoncer et démontrer la proposition (42) relative à la somme et au produit de deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Démontrer la formule de Leibniz, relative au produit.
10. Écrire le code d'une fonction `AfficheDescription0` prenant en entrée la liste des listes d'adjacences d'un graphe orienté G, et affichant (sans rien renvoyer) de manière lisible l'ordre de G, ainsi que les listes des degrés entrants et sortants de G.