Chapitre 17 : Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Dans tout ce chapitre, dès que ce n'est pas précisé, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Opérations sur $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \geq 1$. On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels. La donnée $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un élément de $\mathbb{R}^n$ consiste donc en la donnée ordonnée de n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Par exemple, pour travailler avec un élément $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque, il est tout naturel d'écrire :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ réels tels que $x = (x_1, \ldots, x_n)$

ou plus simplement :

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

(si les notations $x_1, \ldots x_n$ ne sont pas déjà fixées, à chaque fois).

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$. Plus précisément, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on dit que x_i est la i-ième coordonnée de $(x_1, \ldots x_n)$.

Opérations sur $\mathbb{R}^n$.

On définit deux opérations sur $\mathbb{R}^n$.

L'**addition** (ou la somme) est définie par l'application notée "$+_{\mathbb{R}^n}$" donnée par:

$$+_{\mathbb{R}^n} \left| \begin{array}{lcl} (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \end{array} \right.$$

Pour tous éléments x et y de $\mathbb{R}^n$, on note plus simplement

$$x + y = +_{\mathbb{R}^n}((x, y))$$

de sorte que, par exemple :

$$(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (5, 7, 9).$$

On dit que $\mathbb{R}^n$ est muni de la loi interne $+$ (ou $+_{\mathbb{R}^n}$ pour être plus précis).

La **multiplication par un scalaire** (ou le produit par un réel) est définie par l'application notée "$\cdot_{\mathbb{R}^n}$" donnée par :

$$\cdot_{\mathbb{R}^n} : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \ldots, \lambda \times x_n) \end{array} \right. .$$

Pour tout réel λ et pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$, on note plus simplement

$$\lambda \cdot x = \cdot_{\mathbb{R}^n}((\lambda, x))$$

de sorte que, par exemple :

$$2 \cdot (1, -1, 0) = (2, -2, 0).$$

On dit que $\mathbb{R}^n$ est muni de la loi externe $\cdot$ (ou $\cdot_{\mathbb{R}^n}$ pour être plus précis).

Remarque. L'indice $\mathbb{R}^n$ de $+_{\mathbb{R}^n}$ et $\cdot_{\mathbb{R}^n}$ permet de ne pas confondre ces applications avec d'autres opérations (par exemple, $+$ désigne aussi canoniquement la somme des réels), mais on ne fait apparaitre ces précisions que lorsque le contexte le nécessite. Dans ce cas, $+_{\mathbb{R}}$ désigne l'opération de somme des nombres réels.

Remarque. On dit que $+_{\mathbb{R}^n}$ est une loi interne car elle fournit un résultat de la même nature que ses arguments (la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^n$ est un élément de $\mathbb{R}^n$). En revanche, $\cdot_{\mathbb{R}^n}$ prends en argument un réel et un élément de $\mathbb{R}^n$ pourfournir un élément de $\mathbb{R}^n$. On dit que c'est une loi externe pour signifier qu'elle prend un réel parmi ses arguments, qui provient d'un autre ensemble que son résultat (lui, dans $\mathbb{R}^n$). Le mot "loi" est ici un mot générique pour désigner des opérations.

La théorie des espaces vectoriels dispose de son vocabulaire spécifique, afin de manier rigoureusement le "type" des objets manipulés (il ne faut surtout pas confondre les scalaires et les vecteurs).

Définition 1. Soit $n \geq 1$. On appelle ***vecteur*** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ tout élément de $\mathbb{R}^n$. On appelle ***scalaire*** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ tout élément de $\mathbb{R}$.

Définition 2. (*i*) On pose $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $0_{\mathbb{R}^n}$ est le ***vecteur nul*** de $\mathbb{R}^n$.

(*ii*) Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $-x = (-1) \cdot x = (-x_1, ..., x_n)$. On dit que $-x$ est l'***opposé*** de x.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on peut donc sommer des vecteurs (loi interne), et multiplier (à gauche) un vecteur par un scalaire (loi externe).

Remarque. Une loi de composition interne sur un ensemble E est, par définition, la donnée d'une application $E \times E \to E$. Une loi de composition externe sur un ensemble E est la donnée d'un ensemble A et d'une application $A \times E \to E$. Dans tout ce chapitre, une loi de composition externe sera ***réelle***, c'est-à-dire donnée par une application $\mathbb{R} \times E \to E$.

2. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel

Proposition 3. **(et définition.)** *Dans cet énoncé, on pose $E = \mathbb{R}^n$. L'ensemble E, muni des opérations $+$ et $\cdot$, vérifie les les propriétés suivantes.*

(*i*) *E est un ensemble non vide, $+ : E \times E \to E$ définit une loi interne, $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ définit une loi externe dont l'ensemble des scalaires est $\mathbb{R}$.*

(*ii*) *(Associativité) $\forall (x, y, z) \in (E)^3, (x + y) + z = x + (y + z)$.*

(*iii*) *(Commutativité) $\forall (x, y) \in (E)^2, x + y = y + x$.*

(*iv*) *(Existence d'un élément neutre) $\forall x \in E, 0_{\mathbb{R}^n} + x = x + 0_{\mathbb{R}^n} = x$.*

(*v*) *(Existence d'un opposé) $\forall x \in E, x + (-x) = (-x) + x = 0_{\mathbb{R}^n}$.*

(*vi*) *(Première compatibilité avec le produit des réels) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.*

(*vii*) *(Seconde compatibilité avec le produit des réels) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$.*

(*viii*) *(Distributivité de $\cdot$ sur $+_{\mathbb{R}}$) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.*

(*ix*) *(Distributivité de $\cdot$ sur $+_E$) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.*

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est une ***structure d'espace vectoriel*** *(réel) sur $E = \mathbb{R}^n$.*

Remarque. Dans cet énoncé, on a posé $E = \mathbb{R}^n$ uniquement dans le but de clarifier un énoncé ultérieur.

Remarque. Dans la suite, on parlera de ***l'espace vectoriel*** $\mathbb{R}^n$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni de ces deux opérations.

Démonstration. Elles sont très faciles, à noter. $\square$

L'intérêt de cette liste de propriétés est multiple :

- Elle précise les règles de calcul élémentaires dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
- Elle est "minimale", dans le sens que toutes les autres règles de calcul se déduisent de celles-ci. Ceci est expliqué dans le paragraphe suivant.

3. Règles de calcul supplémentaires

Voici donc les autres règles de calcul qui découlent de la (proposition et) définition de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4. *Dans cet énoncé, on pose $E = \mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel E vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall (x, y, z) \in E^3, x + y = x + z \iff y = z.$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E^n, \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E.$

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot x = \mu \cdot x \iff \lambda = \mu$ *ou* $x = 0_E.$

(iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot x = \lambda \cdot y \iff x = y$ *ou* $\lambda = 0.$

(v) $\forall x \in E, -(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x.$

Démonstration. À noter $\square$

Remarque. Attention à ne pas inventer de règles de calcul ! Toutes les règles de calcul légitimes sont présentées avec les deux énoncés précédents.

Remarque. **Notation :** Dans la suite, pour tout scalaire λ et pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

- on se permet de noter λx à la place de $\lambda \cdot x$,
- on se permet de noter $x - y$ le vecteur $x + (-y)$. Attention, on ne parlera jamais d'opération de soustraction (soustraire, c'est ajouter l'opposé !).

4. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

L'ensemble $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est également muni :

- D'une loi de composition interne $+_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} : E \times E \to E$ donnée par la somme de matrices :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- D'une loi de composition externe $\cdot_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} : \mathbb{R} \times E \to E$ donnée par la multiplication par un réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda \cdot_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors, les propriétés calculatoires sont les mêmes que dans $\mathbb{R}^n$. Ce n'est pas étonnant : ces opérations se comportent de la même manière (elles sont "en ligne" dans $\mathbb{R}^n$ et "en colonne" dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Plus précisément,

Proposition 5. *(i) La proposition 3 est également vraie en considérant l'ensemble $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni des opérations $+_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\cdot_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ du calcul matriciel, et en posant :*

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), -X = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

On note également plus simplement $+$ et $\cdot$ ces opérations si le contexte est clair.
On dit que le triplet $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans la suite, on parlera de ***l'espace vectoriel*** *$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour désigner l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de ces deux opérations.*

(ii) La proposition 4 est également vraie pour $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Remarques à noter. □

5. Axiomatique des espaces vectoriels

Soit E un ensemble, et $+_E : E \times E \to E$ une loi de composition interne, $\cdot_E : \mathbb{R} \times E \to E$ une loi de composition externe.

Si $(E, +_E, \cdot_E)$ vérifie la proposition 3, on dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est une structure d'espace vectoriel sur E.

Si on résume ces propriétés en une notion "d'espace vectoriel", c'est qu'elles sont vraies dans beaucoup d'autres cas, et que **tout** ce qu'on verra dans ce chapitre (à une unique exception près, la notion ultérieure de base canonique) se généralise bien dans ces autres cas. Par exemple (à la donnée de l'élément neutre 0_E et de l'inverse $-x$ d'un vecteur x près), cet énoncé reste vrai pour les triplets $(E, +, \cdot)$ suivants :

(*i*) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille (n, p) (fixée), muni de sa somme et de son opération de multiplication par un réel, vérifie les propriétés ci-dessus. On parlera de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(*ii*) L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels est aussi un espace vectoriel, lorsqu'il est muni des opérations définies par
$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X) \text{ et } (\lambda \cdot P)(X) = \lambda \times P(X)$$
(pour tous polynômes P et Q, et pour tout réel λ).

(*iii*) Avec ces mêmes lois, $\mathbb{R}_n[X]$ est aussi un espace vectoriel.

(*iv*) L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ peut être muni des opérations définies par
$$(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n \text{ et } \lambda \cdot (u_n)_n = (\lambda u_n)_n$$
et devient à son tour un espace vectoriel.

(*v*) L'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonction réelles d'une partie I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni des opérations décrites par
$$\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x),$$
est aussi un espace vectoriel.

(*vi*) Il y a de nombreux autres exemples dans tous les domaines des mathématiques.

On peut donc développer une théorie générale et s'en servir dans tous ces contextes.

Pour commencer, on généralise ce vocabulaire.

Définition 6. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. On appelle ***vecteur*** de cet espace vectoriel tout élément de E. On appelle ***scalaire*** de l'espace vectoriel E tout élément de $\mathbb{R}$.

Définition 7. On dit que 0_E est le vecteur nul de E. On dit que $-x$ est l'opposé de x, pour tout vecteur x.

II. Combinaisons linéaires, familles de vecteurs et bases

A partir de maintenant et pour tout ce chapitre, E désigne l'un des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Veillez à le préciser d'une manière ou d'une autre lors des restitutions de cours.

1. Notion de combinaison linéaire

Cette notion est l'objet d'étude principale de ce chapitre.

Commençons par s'habituer à une petite gymnastique.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On pose $u = (3, -1, 2)$ et $v = (1, 0, 4)$. Soient λ et μ des scalaires. Expliciter $\lambda u + \mu v$.

Définition 9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs de E. Soit $v \in E$.

(i) On dit que le vecteur v est ***combinaison linéaire*** des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

(ii) Soit $\lambda_1, \dots \lambda_k$ des scalaires. On dit que $\lambda_1, \dots \lambda_k$ sont ***des coefficients*** de la combinaison linéaire

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$$

des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Exemple 10. (i) Soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs de E (où $k \in \mathbb{N}^*$). Alors, 0_E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots u_k$.
En effet,

$$0_E = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_k$$

car : $\forall x \in E, 0x = 0_E$ (proposition 4), et $0_E + 0_E + \ldots + 0_E = 0_E$ (proposition 3 (iv), et récurrence sur le nombre de termes).

(ii) $(3, 5) = (1, 1) + 2(1, 2)$ donc le vecteur $(3, 5)$ de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

(iii) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on a la chaîne d'égalités :

$$(3, 5) = (3, 0) + (0, 5) = 3(1, 0) + 5(0, 1)$$

donc le vecteur $(3, 5)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

(iv) De même,

$$(1, 2, 3) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

donc, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

(v) Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors,
$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \cdot e_i = x_i(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0) = (0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots 0)$$
(où x_i est en i-ième position) donc
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Ainsi, tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$, des coefficients étant donnés par $x_1, \ldots, x_n$.

(vi) Pour tous réels λ et μ, $\lambda(1,0) + \mu(2,0) = (\lambda + 2\mu, 0)$. Donc toute combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(2,0)$ a sa seconde coordonnée nulle. Donc $(1,1)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(2,0)$.

Remarque. Méthode : Dans l'espace vectoriel E, pour déterminer si un vecteur donné v est combinaison linéaire de vecteurs donnés $u_1, \ldots, u_k$:

(i) On considère un k-uplets de scalaires quelconques $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, de sorte à

(ii) résoudre l'équation $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k$ d'inconnues réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

La résolution de cette équation se traduit systématiquement par la résolution d'un système linéaire.

Exemple 11. Le vecteur $(1,2)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1,-1)$ et $(1,1)$?

Exemple 12. Le vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$?

Exemple 13. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que le vecteur $(1, a, -1)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, -3)$ et $(-1, 1, 0)$.

Exemple 14. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,2,0), (1,-1,0)$ et $(0,1,1)$.

2. Familles de vecteurs et bases

Définition 15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ de l'espace vectoriel E. On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille (fini) de vecteurs de E. L'entier p est appelé le cardinal de cette famille.

Exemple 16. Posons $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$. Alors, (v_1, v_2) est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

La notion de combinaison linéaire s'utilise aussi de la manière suivante.

Définition 17. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ toute combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

Définition 18. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E.
On dit que $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base** de E si :
$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

Autrement dit, $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, et de manière unique.

Exemple 19. (i) **(Base canonique de $\mathbb{R}^3$)** On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
Alors, (e_1, e_2, e_3) est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrons que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) **(Base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)** On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que (E_1, E_2, E_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(iii) La famille (v_1, v_2, v_3) donnée par

$$v_1 = (1,0,2),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,1)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(iv) La famille $(0_{\mathbb{R}^2}, (1,2))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Remarque. Si une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de l'espace vectoriel E contient 0_E, alors cette famille n'est pas une base de E. En effet, si par exemple $u_1 = 0_E$, alors :

$$0_E = 0 \cdot u_1 = 2u_1$$

donc le vecteur 0_E s'écrit de deux manières différentes comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, ce qui prouve que $(u_1, \ldots, u_n)$ n'est pas une base.

Définition 20. (Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)(Et proposition.)

(i) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ où seule la i-ième coordonnée est non nulle et vaut 1.
Alors, $(e_1, \ldots e_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, appelée ***la base canonique*** de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où seul le coefficient d'indice $(i, 1)$ est non nul et vaut 1.
Alors, $(E_1, \ldots E_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelée ***la base canonique*** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 21. Explicitons les bases canoniques de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Méthode : Dans l'espace vectoriel E, pour déterminer si une famille donnée $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base, en revenant à la définition on peut :

(i) Considérer un élément $x \in E$ fixé de manière quelconque, et

(ii) appliquer la méthode du II.1 pour déterminer si x est combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

(iii) Le système obtenu est alors un système linéaire (S) à paramètres (les coordonnées indéterminées de x sont dans le second membre). On applique le raisonnement suivant :

(iv) $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E si et seulement si ce système est de Cramer (ce qui ne dépend pas de ce second membre, d'après le cours sur les matrices).

Pour le dernier point, le raisonnement est le suivant : $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E si et seulement si l'équation

$$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n,$$

d'inconnues $\lambda_1, \dots \lambda_n$, admet une unique solution pour tout vecteur x,
si et seulement si le système obtenu (S) est de Cramer.

Exemple 22. La famille ($\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

3. Matrice des coordonnées dans une base

Définition 23. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de l'espace vectoriel E (où $p \in \mathbb{N}^*$) et $x \in E$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ l'unique p-uplet de réels tel que

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p.$$

La matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est appelée **matrice des coordonnées de x dans la base** $(u_1, \dots, u_p)$. On dit aussi que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base.

Exemple 24. Quelle est la matrice des coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base de l'exemple 22?

III. Sous-espaces vectoriels

Dans la suite, E désigne toujours l'un des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Notion de sous-espace vectoriel

Définition 25. Soit F une partie de l'espace vectoriel E.
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si :

(i) F est non vide,

(ii) (Stabilité par la loi $+$) $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$,

(iii) (Stabilité par la loi $\cdot$) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Remarque. Pour justifier la terminologie : si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +_E, \cdot_E)$, alors F est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel $(F, +_F, \cdot_F)$ donnée tout simplement par :

$$+_F : \left| \begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x +_E y \end{array} \right. \text{ et } \cdot_F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot_E x \end{array} \right. .$$

En pratique, pour démontrer qu'une partie F de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E, on utilise la caractérisation suivante.

Proposition 26. ***(Caractérisation en trois points des sous espaces vectoriels)*** *Soit F un ensemble, et E l'un des espaces vectoriels du cours. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les trois points suivants :*

(i) $F \subset E$,

(ii) $0_E \in F$,

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.

Démonstration. Formelle et pas difficile, mais on passe. Exercice de logique raisonnable. □

Exemple 27. Montrons que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 28. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exemple 29. E a toujours au moins deux sous-espaces vectoriels : $\{0_E\}$ et E.

On peut déjà remarquer le fait capital suivant :

Proposition 30. *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Alors, F est stable par combinaison linéaires :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (f_1, \ldots f_k) \in F^k, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k \in F.$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire d'éléments de F est un élément de F.

Démonstration. À noter. □

2. Sous espaces vectoriels et équations linéaires homogènes

Ce paragraphe fournira "d'un coup" un grand nombre d'exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 31. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et (L) une équation linéaire homogène à n inconnues. Alors, l'ensemble des solutions de (L) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. A noter □

Une proposition importante :

Proposition 32. *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors, $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.*

Démonstration. À noter □

Remarque. Attention, la réunion de deux sous espaces vectoriels n'est quasiment jamais un sous espace vectoriel (cf TD).

Remarque. Avec une démonstration similaire, on montre : l'intersection d'un nombre quelconque de sous espaces vectoriels est aussi un sous espace vectoriel. On peut aussi, à partir de cette proposition, procéder par récurrence pour démontrer cet énoncé pour les intersections finies.

Exemple 33. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 0\}$. Alors, F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ d'après la proposition 31, donc $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3x = 0 \end{cases}\}$ est aussi un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, F et G sont des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et leur intersection $F \cap G$ est une droite.

Proposition 34. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. A noter. □

Exemple 35. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ x - 2y - 2x + 4t = 0 \end{cases}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (à 4 inconnues).

Remarque. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ x - 2y - 2x + 4t = 0 \end{cases}\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, car il ne contient pas le vecteur nul (le système n'est pas homogène). L'ensemble des solutions d'un système linéaire non homogène n'est jamais un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, pour cette même raison.

3. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Proposition 36. (et définition) :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(u_1, \ldots, u_k)$*, et on note* $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$*, l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_k$:*

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k | (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k\}.$$

Alors, $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ *est un sous espace vectoriel de E.*

Démonstration. A noter. □

Exemple 37. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Décrivons $\text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_i)$.

Exemple 38. Montrons $\text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | y = z\}$.

Pour montrer ce genre d'égalité faisant intervenir un sous-espace vectoriel engendré, on utilise volontiers la proposition suivante (sous peine de refaire, à chaque fois, les mêmes calculs).

Proposition 39. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de l'espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \subset F \iff \forall i \in [\![1, n]\!], u_i \in F.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 40. Montrons que $\text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

4. Base d'un sous-espace vectoriel

Cette définition est en fait une redite, mais pour clarifier :

Définition 41. Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de F. On dit que $(u_1, \ldots, u_k)$ est une ***base*** de F si :

$$\forall v \in F, \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

Autrement dit, $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base de F si et seulement si tout vecteur de F s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille.

Remarque. Attention, dans la définition $(u_1, \ldots, u_k)$ est une famille de vecteurs de F, et c'est important !

Exemple 42. Justifions que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et montrons que la famille $((1, -1))$ (constituée d'un seul vecteur de $\mathbb{R}^2$) est une base de F.

Exemple 43. Montrons que $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $x + y + z = 0$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Bases et sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Dans le cadre de ce chapitre ($E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), on démontrera plus tard que tous les sous-espaces vectoriels envisageables sont des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs. Cela reste vrai en toute généralité, dans la mesure où l'on peut généraliser le reste (HP).

Tout cela pour dire que les méthodes de cette partie sont très importantes, car très souvent applicables.

Proposition 44. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E. Alors :*

(i) S'il existe $p \in [\![1, k]\!]$ tel que $u_p \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_k)$, alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1}, u_{p+1}, \ldots, u_k).$$

(ii) Sinon, $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.

Démonstration. A noter. □

Méthode : Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de la forme $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$:

(i) On détermine l'ensemble des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E,$$

ce qui nous mène à résoudre un système linéaire homogène.

(ii) Puis, on applique "à répétition" la proposition précédente pour retirer à la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ des vecteurs jusqu'à en avoir extrait une base.

Exemple 45. Déterminons une base de $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix})$.

Exercice 46. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}((1, 2), (-1, 1), (1, 5))$.

Remarque. En particulier, on peut toujours directement retirer 0_E d'une famille de vecteurs sans changer l'espace vectoriel engendré : pour tous vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ d'un espace vectoriel E,

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k, 0_E) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

Cette méthode peut sembler un peu "lourde", et est clarifiée par les notions définies ci-dessous.

6. Familles libres et génératrices

a) Famille libre

Définition 47. Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1, \ldots, u_k)$ est une famille **libre** (ou linéairement indépendante) si tout élément de E est combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_k)$ d'au plus une manière. Autrement dit, $(u_1, \ldots, u_k)$ est dite libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \forall (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \implies \forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = \mu_i.$$

Une famille non libre est dite **liée**.

Méthode : Pour déterminer si une famille est libre, on utilise plutôt la proposition suivante :

Proposition 48. *Une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de E est libre si et seulement si :*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = 0.$$

Démonstration. À noter □

Exemple 49. (i) La famille $((1,-1),(1,1))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

(ii) La famille $((1,2,-1),(2,-3,0),(3,-1,-1))$ est-elle libre ?

Proposition 50. *On appelle sous-famille d'une famille de vecteurs toute famille obtenue en retirant des vecteurs à cette famille. Alors, toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

Démonstration. À noter. □

Proposition 51. *Soit $(u_1,\dots,u_k)$ une famille de vecteurs de E. Alors, cette famille est libre si et seulement si :*

$$\forall p \in [\![1,k]\!], u_p \notin \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{p-1},u_{p+1},\dots,u_k).$$

Démonstration. À noter □

Remarque. D'après le paragraphe précédent, $(u_1,\dots,u_k)$ est libre si et seulement si c'est une base de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$.

Exemple 52. Voici quelques exemples à noter :

(i) Si une famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_k)$ contient le vecteur nul, alors elle est liée.

(ii) Une famille (u) constituée d'un seul vecteur est libre si et seulement si u n'est pas le vecteur nul.

(iii) On peut détecter très rapidement si une famille de deux vecteurs (u,v) est libre ou liée : elle est liée si et seulement si u et v sont ***colinéaires***, ce qui signifie :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u.$$

Par exemple, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $(2,1)$ et $(4,2)$ sont colinéaires (car $(4,2) = 2 \cdot (2,1)$) donc la famille $((2,1),(4,2))$ est liée.

On peut justifier aisément que $(1,2)$ et $(1,3)$ ne sont pas colinéaires : ils forment une famille libre.

b) Famille génératrice

Définition 53. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(u_1,\dots,u_k)$ une famille de vecteurs de F. On dit que $(u_1,\dots,u_k)$ est une famille génératrice de F si :

$$\forall v \in F, \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k, v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

Autrement dit, $(u_1,\dots,u_k)$ est une famille génératrice de F si et seulement si tout vecteur de F est combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_k$.
Autrement dit, $(u_1,\dots,u_k)$ est une famille génératrice de F si et seulement si $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$.

Exemple 54. Toute base de E est une famille génératrice de E.

Voici une méthode à suivre pour montrer qu'une famille est génératrice.

Exemple 55. Montrons que $((1,-1,0),(1,0,-1))$ est une famille génératrice du sous espace vectoriel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. On appelle sur-famille d'une famille de vecteurs de E toute famille obtenue en y ajoutant des vecteurs de E. Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.

c) Liens avec les bases

Une conséquence directe des définitions :

Proposition 56. *Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E, et F un sous-espace vectoriel de E. Il est équivalent de dire :*
 (i) $(u_1, \dots, u_k)$ *est une base de F, et*
 (ii) $(u_1, \dots, u_k)$ *est une famille libre et génératrice de F.*

Démonstration. Immédiat avec les trois définitions. □

On peut donc montrer qu'une famille est une base de E, ou d'un sous espace F de E, en deux temps.

Exemple 57. La famille $((1, -1), (1, 1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

7. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 58. (Admise) *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Alors, il existe une base de F. De plus, Si F admet une base de cardinal k, alors toute base de F est de cardinal k.*

Cette proposition sera démontrée en 2e année, après un petit approfondissement des résultats vus jusqu'ici. Nous l'admettons pour introduire la notion fondamentale de dimension d'un espace vectoriel.

Définition 59. Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. On appelle **dimension de** F, et on note $\dim(F)$, le nombre commun de vecteurs de toute base de F.

Remarque. L'étude des espaces vectoriels "de dimension infinie" ne sont pas au programme, mais on les manipule : $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, par exemple, ne sont pas de dimension finie (ils n'ont pas de base de cardinal fini).

Exemple 60. La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est de cardinal n, donc

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de cardinal n, donc :

$$\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n.$$

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille de polynômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Elle admet $n+1$ vecteurs :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$$

(voir 2A).

Remarque. L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous espace vectoriel légitime de E, mais un cas particulier. Pour des raisons logiques, les définitions s'étendent ainsi : son unique base est la famille vide () et il est donc de dimension 0 ("HP").

Ceci permet parfois de conclure très rapidement.

Exemple 61. La famille $((1, 0, 1), (2, 3, 0))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Voici une question courante :

Exemple 62. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\}$. F est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer une base de F et donner sa dimension.

Proposition 63. (et définition) *Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de E. Alors, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ admet une base constituée d'au plus k vecteurs. On appelle* **rang** *de la famille $(u_1, \dots, u_k)$, et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_k)$, l'entier :*

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)).$$

On a donc $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) \leq k$.

Démonstration. On a vu dans le paragraphe III.5 qu'une certaine sous famille de $(u_1, \dots, u_k)$ forme une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, ce qui démontre la proposition énoncée. □

Exercice 64. Déterminer le rang de $((1,2,0),(1,-1,0),(0,1,0))$. On appliquera la méthode du $III.5$ pour déterminer une base du sous espace engendré par ces vecteurs.

Enfin, la proposition sûrement la plus utilisée pour démontrer qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel.

Proposition 65. (Admise) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Posons $k = \dim(F)$. Alors :*

(i) Toute famille libre de F est constituée d'au plus k vecteurs. De plus, toute famille libre de k vecteurs de F est une base de F.

(ii) Toute famille génératrice de F est constituée d'au moins k vecteurs. De plus, toute famille génératrice de k vecteurs de F est une base de F.

Méthode : Pour démontrer qu'une famille de k vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de dimension k est une base de F, on peut montrer que cette famille est libre ou génératrice de F (au choix), et on conclut avec la proposition précédente. Ne pas oublier de bien vérifier que la famille a le bon nombre de vecteurs.

Exemple 66. La famille $((1,1,0),(0,0,1),(2,1,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Enfin, la notion de dimension simplifie très souvent les démonstrations d'égalités entre sous espaces vectoriels.

Proposition 67. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. Alors :*

(i) Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.

(ii) Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 68. Soit $F = \{(x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}^2$. Donner une base et sa dimension. Qu'en déduire?

IV. Annexe

1. Étude des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Le but de cette partie est de caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. C'est assez facile avec ce qu'on a fait.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $F \Subset \mathbb{R}^3$ donc par théorème, $\dim(F) \leq 3$. Il n'y a donc que 4 cas possibles.

- **Premier cas :** $\dim(F) = 0$.

  Remarque. soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors, $\dim(F) = 0 \iff F = \{0_E\}$.

  C'est une convention, qui découle des conventions sur les sommes vides : $\dim(F) = 0$ si et seulement si la famille à constituée de 0 vecteurs est une base de F. Avec la définition de la notion de base, une somme vide (sans termes) apparait. Par convention, cette somme vaut 0_E.

Donc la définition de "la famille vide est une base de F" se lit "$\forall v \in F, v = 0_E$".

Donc l'unique sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 est $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- **Second cas :** $\dim(F) = 1$**.**

  Dans ce cas, F admet une base de la forme (v) où $v \in \mathbb{R}^3$.

  De plus, (v) étant une base de F, c'est une famille libre constituée d'un seul vecteur v, donc $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $F = \text{Vect}(v)$.

  Réciproquement, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ non nul, $\text{Vect}(v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 car (v) en est une base vu que v est non nul.

  Par conséquent, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\text{Vect}(v)$, ôù v est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

  Enfin, pour tous vecteurs v et w non nuls de $\mathbb{R}^3$, $\text{Vect}(v) = \text{Vect}(w)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $w = \lambda v$.

  Définition 69. (et proposition, valable dans tout espace vectoriel E)
  Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. On appelle ***droite vectorielle portée par*** v le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(v)$ de E.
  Deux droites vectorielles $\text{Vect}(v)$ et $\text{Vect}(w)$ de E sont égales si et seulement si v et w sont colinéaires, et ce pour tous vecteurs v et w non nuls de E.

  Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 sont donc les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

- **Troisième cas** $\dim(F) = 2$**.**

  Dans ce cas, on dispose d'une base (u, v) de F : $F = \text{Vect}(u, v)$ et (u, v) est une famille libre.

  Autrement dit, $F = \text{Vect}(u, v)$ et u et v ne sont pas colinéaires (manière plus imagée de dire que (u, v) est libre).

  Remarque. Attention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

  Définition 70. Soit E un espace vectoriel, et u et v deux éléments de E.
  Si u et v ne sont pas colinéaires, on appelle ***plan vectoriel engendré par*** u ***et*** v le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u, v)$ de E.

  Proposition 71. *Soient u, v des vecteurs de E.*
  On suppose que u et v ne sont pas colinéaires. Alors :
  - *Le plan vectoriel $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2.*
  - *Pour tous vecteurs u', v' de E :*

  $$\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u', v') \iff \begin{cases} u' \in \text{Vect}(u, v) \\ v' \in \text{Vect}(u, v) \\ u' \text{ et } v' \text{ ne sont pas colinéaires} \end{cases}$$

  Démonstration. Premier point en exercice.

  Second point, en exercice, avec aide pour une partie de l'implication $\Rightarrow$:

  Si $\begin{cases} u' \in \text{Vect}(u, v) \\ v' \in \text{Vect}(u, v) \\ u' \text{ et } v' \text{ ne sont pas colinéaires} \end{cases}$, alors par théorème $\text{Vect}(u', v') \subset \text{Vect}(u, v)$.

  (u', v') étant libre, $\dim(\text{Vect}(u', v')) = 2 = \dim(\text{Vect}(u, v))$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u', v')$. $\square$

  Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 sont donc les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- **Dernier cas :** $\dim(F) = 3$

  Dans ce cas, $\begin{cases} F \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) \end{cases}$ donc par inclusion et égalité des dimensions, $F = \mathbb{R}^3$.

- **Conclusion**

  Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont exactement :

  - Le sous-espace vectoriel nul,
  - les droites vectorielles,
  - les plans vectoriels,
  - l'espace $\mathbb{R}^3$ en entier.

2. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soient n et p deux entier naturels non nuls, fixés dans toute cette partie.

Proposition 72. *L'ensemble $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$...*
- *muni de l'opération $+_E$ donné par la somme de matrices,*
- *muni de l'opération $\cdot_E$ donné par la multiplication des matrices par un réel,*
- *pour lequel le vecteur nul 0_E est donné par $O_E = O_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$,*
- *pour lequel l'opposé de toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est donné par la matrice $-A$,*

vérifie la proposition et définition 3.
Donc $(E, +_E, \cdot_E)$ est une structure d'espace vectoriel sur E.

Donc tous les résultats de ce cours s'appliquent pour $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Voir les règles de calcul sur les matrices pour vérifier la proposition 3 □

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

On pose, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$:

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

où le seul coefficient non nul de $E_{i,j}$ est son coefficient d'indice (i, j).

Autrement dit, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$:

$$E_{i,j} = (\delta_{u,v}^{(i,j)})_{(u,v) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$$

où l'on pose pour tout $(u, v) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$:

$$\delta_{u,v}^{(i,j)} = \begin{cases} 1 \text{ si } (u, v) = (i, j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Exemple 73. Pour $n = 2$ et $p = 2$, on a ainsi défini les vecteurs $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnés par : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Attention, cette notation des $E_{i,j}$ est très courante, mais nécessite que les entiers n et p donnant la taille des matrices envisagées soient fixés auparavant.

Proposition 74. *La famille* $(E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{1,p}, E_{2,1}, ..., E_{2,p}, ..., E_{n,p})$ *est une base de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *Cette famille étant constituée de* np *vecteurs :*

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np.$$

Démonstration. En exercice formel facile.

Pour la dimension, le nombre de ces matrices est $\text{Card}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]) = n \times p$ d'après la formule donnant le cardinal d'un produit d'ensembles finis. $\square$

Exemple 75. Pour $n = 2$ et $p = 3$, la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est la famille

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

donnée par :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right).$$

La vérification que c'est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est assez immédiate et commence ainsi ;

Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Notons $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ la famille des coefficients de A.

Alors, pour tous réels $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, ..., \lambda_{2,3}$:

$$A = \lambda_{1,1}E_{1,1} + \lambda_{1,2}E_{1,2} + \lambda_{1,3}E_{1,3} + \lambda_{2,1}E_{2,1} + \lambda_{2,2}E_{2,2} + \lambda_{2,3}E_{2,3} \iff \dots.$$

Reste : pour vous.