Programme de colle n° 23 : Dérivation (fin). Espaces vectoriels (début)

Semaine du lundi 31 mars.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Dérivation : l'inégalité des accroissements finis

23.1 Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1, sur un intervalle (en un point qui n'est pas une extrémité de cet intervalle).

23.2 Le lemme de Rolle. Le théorème des accroissements finis.

23.3 L'inégalité des accroissements finis : version HP (avec un encadrement de f'). Version au programme : si f est dérivable sur un intervalle I et si on dispose d'un réel k tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous éléments a et b de I . Exemples d'utilisations.

23.4 Monotonie et signe de la dérivée, condition suffisante de monotonie stricte (pour les fonctions dérivables).

23.5 Condition suffisante d'extrémum local (pour une fonction dérivable).

23.6 Exemple classique d'application de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude d'une suite récurrente.

Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

23.7 Opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Définition et proposition : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel (proposition en 9 points). Explication de "l'axiomatique" des espaces vectoriels (les propriétés dégagées dans la définition précédente sont valables dans beaucoup d'autres cas). Règles de calcul supplémentaires dans les espaces vectoriels (prop. 4). $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est également un espace vectoriel. Vocabulaire : vecteur, scalaire, vecteur nul, opposé d'un vecteur.

23.8 Dans la suite, E désigne $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

23.9 Notion de combinaison linéaire, coefficients d'une combinaison linéaire. Nombreux exemples et méthodes pour déterminer si un vecteur donné est combinaison linéaire de vecteurs donnés.

23.10 Famille de vecteurs de E . Base de E . Base canonique de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Méthode pour déterminer si une famille donnée est une base de E . Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Python

23.11 Graphes : conversions entre matrice d'adjacence et liste des listes d'adjacences.

Fonction donnant le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets donnés. Distance (combinatoire) dans un graphe non orienté. Commande `np.inf`. Implémentation de la distance en Python. Connexité d'un graphe donné par sa matrice d'adjacence : implémentation d'une fonction Python. Classe de connexité d'un sommet. Fonction renvoyant (sous forme de liste) la classe de connexité d'un sommet donné (en utilisant simplement la distance).

HP, démonstrations données en annexe.

Elèves : attention à la précision du langage : on dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont DES coefficients de...

Quelques questions de cours

- Énoncer et démontrer (cas d'un maximum local) la condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.
- Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer. Énoncer l'inégalité des accroissements finis (version au programme) et démontrer ce résultat à l'aide du théorème des accroissements finis.
- Énoncer et démontrer (cas croissant) la condition suffisante de monotonie stricte pour une fonction dérivable.
- Énoncer la condition suffisante d'extremum local pour les fonctions dérivables sur un intervalle. Déterminer les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - x$.
- Énoncer la proposition 4 donnant les règles de calcul valables dans tout espace vectoriel. Démontrer les deux premiers points (simplification à gauche, caractérisation de la situation $\lambda \cdot x = 0_E$). Premier point : uniquement dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, en revenant à la nature des éléments de $\mathbb{R}^n$. Second point : dans le contexte général où $(E, +, \cdot)$ vérifie la proposition 3, et en énonçant tous les points utilisés. *Elèves : c'est exactement ce qu'on a fait en cours.*
- Définir la notion de combinaison linéaire et de coefficients d'une combinaison linéaire. Le vecteur v suivant est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ suivants? ($v, u_1, \dots, u_k$ explicités par l'interrogation, dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \leq 3$ et $k \leq 4$).

7. Définir la notion de base d'un espace vectoriel E . Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) donnée par $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Définir la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer (dans l'un de ces cas) que la famille donnée est bien une base de l'espace vectoriel considéré. Montrer que toute famille de vecteurs de E contenant le vecteur 0_E n'est pas une base de E .
9. Définir la distance entre deux sommets d'un graphe. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def distance(M, i, j):` prenant en entrée la matrice d'adjacence M d'un graphe G et les numéros i et j de deux de ses sommets (numérotés à partir de 0) et renvoyant en sortie la distance entre ces sommets dans le graphe G .