

Programme de colle n° 24 : Espaces vectoriels.

Semaine du lundi 7 avril.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

E désigne toujours un espace vectoriel donné par $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour un certain entier n .

Sous-espaces vectoriels

24.1 Notion de sous-espace vectoriel. Caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire de tout sous-espace vectoriel.

24.2 L'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

24.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de E , $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Caractérisation des inclusions type $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset F$ où F est un sous-espace vectoriel de E .

24.4 Base d'un sous-espace vectoriel. Proposition : S'il existe p tel que $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$ alors :

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$.

Sinon, $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Exemples d'utilisations.

24.5 Notion de famille libre, de famille liée. Caractérisation des familles libres. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. $(u_1, \dots, u_k)$ est libre si et seulement si $u_p \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_l)$.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de sous-espace vectoriel. Énoncer la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Énoncer et démontrer la proposition (30) relative à la stabilité par combinaison linéaire de tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.
3. Que dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel? Le démontrer, puis montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.
5. Définir la notion de base d'un sous-espace vectoriel. Déterminer une base de l'ensemble des solutions de l'équation $x + y + z = 0$.
6. Énoncer et démontrer la proposition (44) donnant une condition pour qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ soit une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.
7. Définir la notion de famille libre. Énoncer et démontrer la proposition (48) donnant une caractérisation des familles libres.
8. Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de E . Montrer l'équivalence entre :
 - $\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, u_p \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$, et
 - $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.