Chapitre 18 : Intégrales de fonction continue sur un segment

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Aire sous la courbe et primitives

Dans de chapitre, on s'intéresse au calcul de l'aire formée par le graphe d'une fonction donnée entre deux points. On définit pour cela la notion d'intégrale définissant cette aire, en remarquant que le calcul de ces aires est intimement lié au calcul de primitives, une démarche "réciproque" de la dérivation.

1. Notion d'aire sous la courbe pour les fonctions continues sur un segment

On s'intéresse au calcul d'aires sous la courbe d'une fonction donnée. Cadrons un peu le problème.

- On va s'intéresser au calcul d'aires sous la courbe de fonction **continues**. C'est un bon cadre, car il est déjà assez fertile en résultats (voir : ce chapitre), et il nous permet d'éviter des complications considérables qui seraient nécessaires si l'on considérais des fonctions non continues.

  Par exemple, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ donnée par :

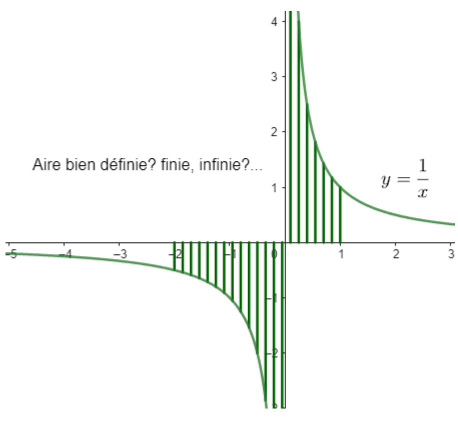
$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

  Elle n'est pas continue. Essayez de la représenter, et vous verrez que répondre à la simple question "quelle aire voudriez vous attribuer à la partie de la courbe entre 0 et 1?" est problématique.

- On va s'intéresser au calcul d'aires de fonctions continues sur **un intervalle**, et prendre ces aires sur **un segment** de l'intervalle.

  Cela se généralise plus tard (cette année et en 2e année) mais avec des complications. Pour l'instant, on en reste à une première étude en évitant les problèmes qui peuvent apparaitre dans un cadre plus large.

  Par exemple, pour la fonction inverse représentée ci-dessous, les aires de -2 à 1 ou de 0 à 1 sembles plus compliquées à appréhender. Dans le premier cas, $[-2, 1] \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle. Dans le second cas, la fonction est définie sur $]0, 1]$ et y est continue, mais $]0, 1]$ n'est pas un segment.



- On va s'intéresser à la notion d'aire **orientée** sous la courbe d'une fonction. C'est une hypothèse nécessaire pour que la théorie fonctionne bien, ce dont ce chapitre témoigne. Et ce n'est pas vraiment contraignant. Nous reviendrons de suite sur ce point.

La démarche dans la suite la suivante :

- On procède à une analyse du problème. On suppose l'existence d'une fonction "aire orientée sous la courbe".
- On étudie les propriétés de cette fonction pour la comprendre.
- On définit la notion d'intégrale d'une fonction entre deux points à partir de cette étude pour formaliser correctement cette notion d'aire.

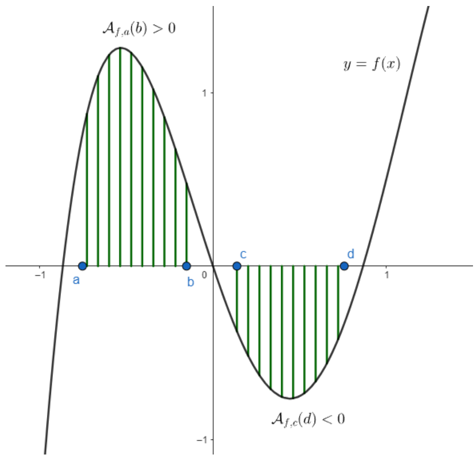
On admet que cette notion d'aire est bien définie.

Proposition 1. (et définition.) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. On admet l'existence d'un réel noté $\mathcal{A}_f(a,b)$, désignant l'aire orientée sous la courbe de f entre les points d'abscisse a et b.*
On définit ainsi la fonction "aire orientée sous la courbe de f" (à partir de a) :

$$\mathcal{A}_{f,a} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{A}_f(a,x) \end{array} \right. .$$

L'aire est **orientée**, ce qui signifie qu'elle est "signée" selon l'orientation de l'aire considérée. On choisit l'orientation "de droite à gauche, de haut en base". Cela signifie que :

- L'aire sous la courbe d'une fonction négative est comptée négativement.

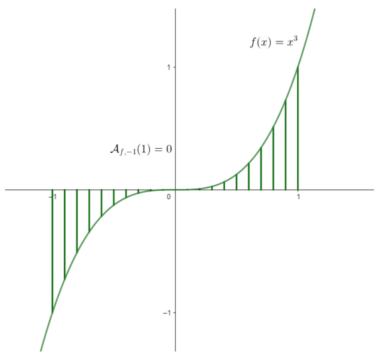


- L'ordre des "bornes" compte. On aura dès que ces symboles sont définis :

$$\mathcal{A}_f(a,b) = -\mathcal{A}_f(b,a).$$

  Par exemple, dans le dessin ci-dessus, $\mathcal{A}_{f,d}(c) = -\mathcal{A}_{f,c}(d) > 0$.

- Une conséquence , des phénomènes de compensation peuvent apparaitre.



Cette considération d'une aire orientée permet d'avoir des règles de calcul plus pratiques à énoncer.

Proposition 2. (Relation de Chasles, version "aire orientée".) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, pour tous points a, b et c de I :*

$$\mathcal{A}_f(a,c) = \mathcal{A}_f(a,b) + \mathcal{A}_f(b,c).$$

Démonstration. Admise, car fait partie des propriétés intuitives qu'on veut avoir pour une notion d'aire orientée. Illustration à noter. Il faut cependant remarquer que si l'aire n'était pas orientée, cette relation ne serait valable que sous des contraintes comme $a \leq b \leq c$ à priori. □

2. Lien avec la notion de primitive

Reprenons notre étude de la fonction "aire sous la courbe" (**toujours orientée dans la suite**).

Proposition 3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Alors, la fonction $\mathcal{A}_{f,a}$ est dérivable sur I, et :*

$$\forall x \in I, (\mathcal{A}_{f,a})'(x) = f(x).$$

Démonstration. En annexe. □

On va maintenant se rendre compte que cet énoncé caractérise l'aire orientée sous une courbe, et la définir plus proprement ainsi.

3. Notion de primitive

Définition 4. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
On appelle ***primitive de f sur I*** toute fonction réelle F définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Exemple 5. À noter.

On admettra ce théorème d'existence de primitive pour les fonctions continues.

Proposition 6. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Si f est continue sur I, alors il existe une primitive de f sur I.*

Démonstration. Théorème admis. Il faudrait, pour le démontrer, construire proprement et formellement la fonction "aire sous la courbe" du paragraphe précédent, et montrer qu'elle fournit une primitive. □

Remarque. Dans beaucoup de cas, on n'a pas besoin de recourir à ce théorème, mais il est indispensable pour les démonstrations de ce chapitre.

Exemple 7. On peut donner facilement une primitive de $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}$ (comme $x \mapsto e^x + \dfrac{x^2}{2} + 1$). En revanche, des fonctions continues aussi simples que $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ admettent des primitives (par le théorème ci-dessus), mais dont on ne peut pas donner une expression avec les fonctions dites "usuelles" (c'est un théorème plus compliqué). On se contente donc de leur existence.

Proposition 8. **(Théorème de structure des primitive d'une fonction sur un intervalle.)**
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
Supposons qu'il existe une primitive F de f sur l'intervalle I, et fixons F une telle primitive.
Alors,

(i) Pour tout réel C, la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

(ii) Si G est une primitive de f sur I, alors il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + C.$$

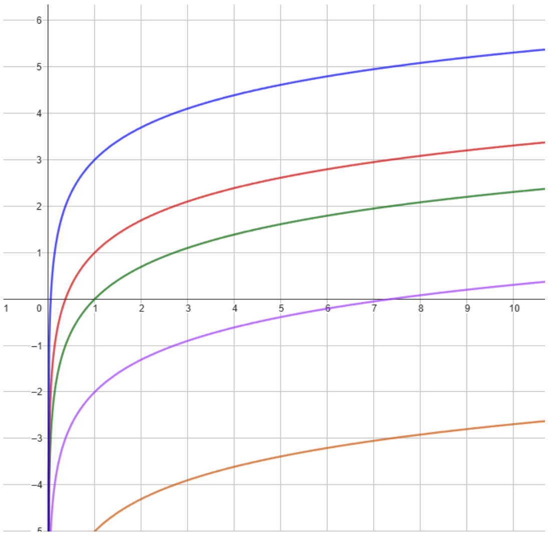
Autrement dit, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions données sur I par :

$$x \mapsto F(x) + C,$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 9. Voici les représentations graphiques de quelques primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



En effet :

- $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par ce théorème, les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto \ln(x) + C$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 10. Déterminons l'ensemble des primitives de quelques fonctions (à noter).

En particulier, pour les fonctions continues, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 11. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.*
Supposons f continue sur I.
Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive $F : I \to \mathbb{R}$ de f sur I telle que :

$$F(x_0) = y_0.$$

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 12. Déterminons l'unique primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $F(2) = 5$.

Exemple 13. On pourrait maintenant définir la fonction ln comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ telle que $\ln(1) = 0$.

Comme on va lier la notion d'aire à la recherche de primitive d'une fonction continue sur un intervalle, on va apprendre à déterminer la primitive de certaines fonctions "sympathiques" à partir des règles connues sur l'opération de dérivation.

Il y a quelques habitudes à prendre.

Exemple 14. Donner une primitive des fonctions suivantes, en indiquant un intervalle d'étude convenable.

(*i*) $x \mapsto e^{\alpha x}$, pour α réel fixé.

(*ii*) $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

(*iv*) $x \mapsto \dfrac{1}{3x}$

Exemple 15. Déterminons une primitive des fonctions continues suivantes, sur un intervalle à préciser.

(*i*) $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

(*ii*) $x \mapsto 2xe^{-x^2}$

(*iii*) $x \mapsto 3x^7 + e^x$

4. Calculs de primitive "à vue"

C désigne une constante réelle, la colonne "$F(x)$" désigne la forme des primitives de la colonne "$f(x)$" sur un intervalle d'étude I.

$f(x)$	$F(x)$	Domaine I ou conditions
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq -2$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(-x) + C$	$\mathbb{R}_-^*$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$a^x, a > 0$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(x) + \beta G(x) + C$	F et G primitives resp. de f et g sur I
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)u(x)$	$\dfrac{(u(x))^2}{2} + C$	(u dérivable sur I, omis dans la suite)
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)} + C$	$u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))}}$	$2\sqrt{u(x)} + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)(u(x))^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$	
$u'(x)(u(x))^n, n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq -2$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)(u(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u(x) > 0$
$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$	

Remarque.

$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x) \rvert) + C$	$u(x) \neq 0$

: Si u est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors u est de signe constant sur I. On peut donc dire que $x \mapsto \ln(\lvert u(x) \rvert)$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I pour signifier que :

(*i*) si u est (strictement) positive sur I, la primitive donnée est $x \mapsto \ln(u(x))$,

(*ii*) si u est (strictement) négative sur I, la primitive donnée est $x \mapsto \ln(-u(x))$.

Exemple 16. Déterminons les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser.

(*i*) $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ (*ii*) $x \mapsto x^2 e^{x^3}$ (*iii*) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^n}{x}$

II. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. D'après notre analyse du problème, si une fonction "aire orientée sous la courbe" (à partir de a) $\mathcal{A}_{f,a}$ existe, alors c'est une primitive de f sur I.

Soient x et y deux points de I. D'après la relation de Chasles et le caractère orienté de l'aire :

$$\mathcal{A}_f(x,y) = \mathcal{A}_f(x,a) + \mathcal{A}_f(a,y) = -\mathcal{A}_f(a,x) + \mathcal{A}_f(a,y)$$

donc :

$$\mathcal{A}_f(x,y) = \mathcal{A}_{f,a}(y) - \mathcal{A}_{f,a}(x).$$

L'idée dans la suite est juste de remarquer que la quantité $F(y) - F(x)$ ne dépend pas de la primitive F de f considérée, et de définir ainsi cette notion d'aire sous la courbe entre deux points x et y, que l'on nomme alors intégrale de f entre x et y.

Définition 17. (et proposition.) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.

(*i*) Soit F une primitive de f sur I. Alors, le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f sur $[a,b]$ choisie. Autrement dit, si G est aussi une primitives de f sur I, alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

(*ii*) On appelle ***intégrale de f entre a et b*** le réel noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ donné par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

(*iii*) On dit que f est ***l'intégrande*** de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On dit que les réels a et b sont les ***bornes de cette intégrale***. Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est indiquée par le symbole suivant :

$$[F(t)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. D'après cette définition, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie si et seulement si f est une fonction continue sur $[a,b]$. Cette notion d'intégrale sera enrichie plus tard.

Remarque. Dans la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, la variable t est une variable locale.

Remarque. On pense donc à l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ comme à l'aire orientée $\mathcal{A}_f(a,b)$, et on passe par la recherche de primitive pour calculer ces intégrales, à priori.

Remarque. Avec ces notations, la définition de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ considère une primitive de f sur un intervalle I contenant a et b. On peut montrer que la quantité $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ainsi définie ne dépend pas de l'intervalle I choisi. En pratique, I est l'intervalle "maximal" du domaine de définition de f contenant a et b.

Exemple 18. Déterminons la valeur des intégrales suivantes

(*i*) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x$ (*ii*) $\displaystyle\int_0^4 e^{-x}\mathrm{d}x$ (*iii*) $\displaystyle\int_{-2}^2 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

Exemple 19. (et proposition.) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Que dire de $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x$?

2. Le théorème fondamental de l'analyse

Voici un théorème appelé le théorème fondamental de l'analyse. Il est une synthèse du lien entre la démarche initiale de comprendre le calcul d'aire sous une courbe, et le calcul de primitive.

Théorème 20. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction* $F : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.*

Démonstration. À noter. □

3. Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Relation de Chasles, orientation

Proposition 21. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Alors :*

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 22. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 \text{ si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 \text{ sinon} \end{cases}$. On peut démontrer que f est (définie et) continue sur $\mathbb{R}$.

Calculons $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 23. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration. À noter. □

b) Intégration et parité

Proposition 24. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur le segment $[-a,a]$.*

- *Si f est impaire sur $[-a,a]$, alors* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- *Si f est paire sur $[-a,a]$, alors* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration. En annexe. Illustration à noter. □

c) Linéarité de l'intégrale

Proposition 25. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors, pour tous réels λ et μ :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans cet énoncé, f et g étant supposées continues sur I, $\lambda f + \mu g$ est aussi continue sur I donc l'intégrale du membre de gauche est bien définie.

Remarque. On démontrera bientôt qu'une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par

$$t \mapsto t\ln(t) - t.$$

Exemple 26. Calculons $\displaystyle\int_0^2 2x^2 + e^x \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^e (1 + \frac{1}{x})\ln(x)\mathrm{d}x$.

d) Positivité et croissance de l'intégrale

Proposition 27. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.*
Supposons : $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$.
Alors :

(i) Si $a \leq b$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ *(positivité de l'intégrale).*

(ii) Si $a < b$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors : $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$. *(positivité stricte de l 'intégrale).*

Démonstration. À noter. □

Remarque. Avec ces notations, et dans le cas $b \leq a$, si f est positive sur le segment $[b,a]$ d'extrémités a et b, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \leq 0$. Ainsi, en appliquant cette proposition à un changement de bornes près, on peut toujours conclure quelque chose si $b \leq a$.

Une conséquence, la propriété de croissance de l'intégrale (on parle aussi d'intégration des inégalités) :

Proposition 28. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I* ***tels que*** *$a \leq b$.*
Si : $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$, *alors :* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 29. Étudions la limite de la suite $(I_n)_n$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)\mathrm{d}x.$$

On utilisera un encadrement et l'inégalité : $\forall t \geq 0, \ln(1+t) \leq t$.

e) L'inégalité triangulaire

Proposition 30. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$. Si $a \leq b$, alors :*

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

III. Techniques de calcul intégral

Il s'agit juste d'utiliser les règles comprises en première partie relatives au calcul de primitives pour obtenir des règles de calcul avec le symbole $\int$.

1. L'intégration par partie

Proposition 31. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I. Alors :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 32. Calculons $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$.

Remarque. Méthode : Lorsqu'on utilise cette proposition pour calculer une intégrale, on dit qu'on procède à une intégration par partie. Face à une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, pour utiliser cette proposition :

- On cherche à exprimer f sous la forme d'un produit de fonctions $f = uv$, et on constate le nombres de manières différentes selon laquelle cette étape peut être réalisée.
- On se demande, pour les décompositions trouvées, si on est capable d'intégrer à vue l'un des facteurs (dans la proposition, avec ses notations, il faut être capable d'intégrer u' pour utiliser l'égalité de droite à gauche).
- On se demande, lorsque c'est le cas, si l'intégrale restante est plus simple à calculer. Si la réponse est oui, on procède à l'intégration par partie.

Exemple 33. On souhaite calculer les intégrales suivantes. Voyons quelles possibilités on a pour une intégration par partie.

(i) $\int_0^2 (x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$ *(ii)* $\int_1^2 x^2 \ln(x)\mathrm{d}x$

Exemple 34. Le coup du 1, le retour Parfois, on procède à une intégration par partie en prenant 1 comme facteur.

Calculons, pour $x > 0$ réel, $\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 35. Parfois, on procède à plusieurs IPP à la suite. C'est souvent le cas quand une IPP permet de faire baisser le degré d'un facteur polynomial "indésirable".

Calculons $\int_1^2 x^2 e^x \mathrm{d}x$.

2. Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 36. *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle et $u : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Alors,*

$$\forall (a,b) \in J^2, \int_a^b f(u(t))u'(t)\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 37. Calculons $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variables "$t = \sqrt{x}$".

Remarque. Méthode : Lorsqu'on utilise cette proposition dans un sens ou dans l'autre, on dit qu'on procède au changement de variable "$x = u(t)$", avec les notations de l'énoncé pour les variables locales utilisées. *Comme pour un changement de variable dans une somme, c'est un des rare moment où, pour expliquer notre démarche, on manipule des variables locales comme si elles ne l'étaient pas.*

On procède alors en trois temps pour former la nouvelle intégrale obtenue.

(i) Changement de bornes : on explicite $u(a)$ et $u(b)$ pour préparer le changement de bornes de la nouvelle intégrale.

(ii) Changement de "différentielle" : on a l'habitude (pour des raisons géométriques historiques) de transformer le symbole $\mathrm{d}x$ en le symbole $u'(t)\mathrm{d}t$, lorsqu'on pose $x = u(t)$.

On peut alors écrire : $x = u(t)$ donc $\mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$.

(iii) Changement de "formule" : on explicite le fait que $f(x) = f(u(t))$.

Exemple 38. (i) Calculons $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

(ii) Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = e^x$"

Remarque. D'après le programme officiel, vous devez être autonome sur les changements de variable dits affines, c'est à dire de la forme $y = \lambda x + \mu$ (λ, μ réels fixés). Ils sont assez simples à reconnaitre.

Exemple 39. Calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\mathrm{d}x$.

Exemple 40. Calculons $\displaystyle\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x$.

3. Exercices corrigés : Intégrales fonctions de leur borne

On étudie souvent des fonctions définies par une intégrale, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 41. On considère la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$.

(i) Déterminer le domaine de définition de ϕ.

(ii) Justifier que ϕ est dérivable sur son domaine de définition, et calculer ϕ'.

(iii) Montrer que ϕ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

(iv) Déterminer la limite de ϕ en 0.

(v) Tracer brièvement le graphe de l'intégrande $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$. Que déduire de la limite précédente sur l'aire sous la courbe de cette fonction entre 0 et 1?

Exemple 42. Déterminer le domaine de dérivabilité, et calculer la dérivée de la fonction donnée par :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^4} \mathrm{d}t.$$

IV. Annexe

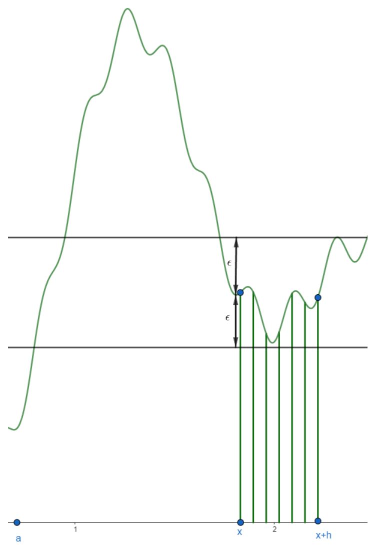
1. Démonstrations

a) Proposition 3

Proposition 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Alors, la fonction $\mathcal{A}_{f,a}$ est dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I, (\mathcal{A}_{f,a})'(x) = f(x).$$

Reprenons les notations de l'énoncé.
Soit $x \in I$.
Montrons que : $\mathcal{A}_{f,a}$ est dérivable en x et $(\mathcal{A}_{f,a})'(x) = f(x)$.
Par définition, il faut pour cela montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.



Intéressons nous au numérateur $\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)$.
D'après la relation de Chasles :

$$\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x) = \mathcal{A}_f(x, x+h)$$

est l'aire sous la courbe de f entre les points d'abscisse x et $x+h$.

L'idée est de démontrer que cette aire vaut environ $hf(x)$ et de conclure à une égalité pour le taux d'accroissement ci-dessus.

Soit $\epsilon > 0$. f étant continue en x, $f(t) \xrightarrow[t \to x]{} f(x)$. Par définition, il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I \cap]x-\delta, x+\delta[, |f(t) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Soit $h \in]-\delta, \delta[$ tel que $x+h \in I$. Alors, pour tout $t \in [x, x+h]$, on a $t \in I \cap]x-\delta, x+\delta[$ donc $f(x) - \epsilon \leq f(t) \leq f(x) + \epsilon$.

L'aire désignée par $\mathcal{A}_f(x, x+h)$ est donc comprise entre les deux rectangles de base commune $[x, x+h]$ et de hauteurs $f(x) - \epsilon$ et $f(x) + \epsilon$. On en déduit sans trop de difficultés (en prenant en compte le signe de h) que si de plus $h \neq 0$:

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}_f(x, x+h)}{h} \leq f(x) + \epsilon.$$

Donc :

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} \leq f(x) + \epsilon.$$

On a donc démontré que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in]-\delta, \delta[$ tel que $\dfrac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h}$ soit défini :

$$\left|\frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} - f(x)\right| \leq \epsilon.$$

C'est exactement la définition de :

$$\frac{\mathcal{A}_{f,a}(x+h) - \mathcal{A}_{f,a}(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x),$$

d'où le résultat.

b) Proposition 24

Proposition 24 : Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction définie et continue sur le segment $[-a, a]$.

- *Si f est impaire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.*
- *Si f est paire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.*

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé. Si $a = 0$, les énoncés sont triviaux (car $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 0$).

Montrons ces énoncés dans le cas $a > 0$.

- Cas où f est impaire.

  On doit donc montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

  D'après la relation de Chasles ($0 \in [-a, a]$), $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

  Donc pour conclure, il suffit de montrer : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

  La fonction f étant continue sur l'intervalle $[-a, a]$, on dispose d'une primitive F de f sur $[-a, a]$.

  Posons $G(x) = F(-x)$ pour tout $x \in [-a, a]$.

  La fonction G ainsi définie est dérivable sur $[-a, a]$ comme composée de $\left|\begin{array}{ccc} [-a, a] & \longrightarrow & [-a, a] \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$, dérivable, par F dérivable sur $[-a, a]$ (en tant que primitive de f).

  $$\forall x \in [-a, a], G'(x) = F'(-x) \times (-1) = -f(-x) = f(x)$$

  car f est impaire.

  Donc G **est une primitive de** f sur $[-a, a]$, donc sur $[-a, 0]$ et ainsi :

  $$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_{-a}^{0} = G(0) - G(-a) = F(0) - F(a) = -(F(a) - F(0)) \overset{(1)}{=} -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

  (1) : car F est une primitive de f sur $[0, a]$.

  D'où le premier point.

- Cas où f est paire.

  On doit donc montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

  D'après la relation de Chasles ($0 \in [-a,a]$), $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

  Donc pour conclure, il suffit de montrer : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

  La fonction f étant continue sur l'intervalle $[-a,a]$, on dispose d'une primitive F de f sur $[-a,a]$.

  Posons $G(x) = -F(-x)$ pour tout $x \in [-a,a]$.

  La fonction G ainsi définie est dérivable sur $[-a,a]$ comme composée de $\left|\begin{array}{ccc} [-a,a] & \longrightarrow & [-a,a] \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$, dérivable, par $-F$ dérivable sur $[-a,a]$ (car F l'est).

  $$\forall x \in [-a,a], G'(x) = -F'(-x) \times (-1) = f(-x) = f(x)$$

  car f est paire.

  Donc G **est une primitive de** f sur $[-a,0]$, donc :

  $$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_{-a}^{0} = G(0) - G(-a) = -F(0) + F(a) = F(a) - F(0) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

  D'où le second point.

Dans le cas où $a < 0$, les résultats découlent directement du fait que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{-a} f(x)\mathrm{d}x$ avec cette fois $-a > 0$, ce qui permet d'appliquer les résultats du cas précédent (exercice).

2. Changements de variables

Remarque. Le mot "différentielle" fait référence au symbole du calcul infinitésimal "dx" de Leibniz (XVIIe siècle).

Exemple 38

(i) Calculons $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable "$y = u(x)$" dans l'intégrale I (ses bornes sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$).

Changement de bornes : Si $x = 1$, alors $y = u(1) = 1$ et si $x = 4$, alors $y = u(4) = 2$.

Changement de différentielle : Si $y = u(x)$, alors $\mathrm{d}y = u'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Donc $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$. *Attention à ne jamais terminer cette étape par un changement de différentielle "contenant du x et du y" : s'arrêter à $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y$ ne permet pas de conclure. en principe, avec les changements de variable qui vont sont donnés, vous pouvez toujours conclure comme dans cet exemple.*

Changement d'intégrande : $\forall x \in [1,4]$, $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{y^2+y}$.

Conclusion : Par changement de variable, $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{y^2+y}2y\mathrm{d}y$. Etc.

Donc $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2}{y+1}\mathrm{d}y = [2\ln(|1+y|)]_1^2 = 2\ln(3) - 2\ln(2) = 2\ln(\frac{3}{2})$.

(*ii*) **Variante importante :** *En pratique, les changement de variables donnés sont bijectifs, et on peut donc inverser la relation $y = u(x)$ en $x = u^{-1}(y)$ ce qui à l'avantage de faciliter le changement de différentielle et d'intégrande. Vous devriez préférer cette version, adoptée dans la suite, sauf pour les changements de variable affines qui sont vraiment plus simples.*

Calculons $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable "$y = \sqrt{x}$".

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable "$y = u(x)$" dans l'intégrale I (ses bornes sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$).

Changement de bornes : Si $x = 1$, alors $y = u(1) = 1$ et si $x = 4$, alors $y = u(4) = 2$.

Changement de différentielle : Si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$ donc $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$ (on dérive $y \mapsto y^2$, et le changement de différentielle est fait).

Changement d'intégrande : Si $y = \sqrt{x}$, alors $x = y^2$ donc $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{y^2+y}$.

Conclusion : Par changement de variable, $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{y^2+y}2y\mathrm{d}y$. Etc.

(*iii*) *Avec une rédaction plus légère.*

La fonction exponentielle étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer le changement de variable "$y = e^x$" dans l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

- Bornes : Si $x = 0$, alors $y = e^0 = 1$ et si $x = 1$, alors $y = e^1 = e$.
- Différentielle : Si $y = e^x$, alors $x = \ln(y)$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{y}\mathrm{d}y$.
- Intégrande : Posant $y = e^x$, $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+y}$.

Conclusion : par changement de variable,

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\frac{1}{y}\mathrm{d}y.$$

Fin du calcul : $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \dfrac{1}{(y+1)y} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$ donc par linéarité :

$$J = \int_1^e \frac{1}{y}\mathrm{d}y - \int_1^e \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = [\ln(|y|)]_1^e - [\ln(|1+y|)]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln(2).$$

Remarque : On peut calculer cette intégrale sans changement de variable en remarquant que $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout réel x, et l'intégrande est alors de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple 39

C'est un changement de variable affine, sur lequel vous devez être autonome.

Comment le détecter ? A composition par une fonction affine près (ici, $x \mapsto 3x+1$), l'intégrande est de la forme $\dfrac{\ln(t)}{t}$ que l'on sait intégrer à vue (de la forme $u(t)u'(t)$ ici). On effectue donc le changement de variable donné par cette fonction affine. C'est assez "visuel", il suffit de s'entrainer quelque fois. Les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc il suffit de dire qu'on effectue un changement de variable affine comme seule justification.

Effectuons le changement de variable affine "$t = 3x+1$" dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}\mathrm{d}x$.

Bornes : Si $x = 1$, alors $t = 3x+1 = 4$ et si $x = 2$, alors $t = 7$.

Différentielle : Si $t = 3x+1$, alors $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$ (on dérive $x \mapsto 3x+1$) donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$. *Les changements de différentielle du cas affine sont toujours aussi simple : on doit juste diviser par le coefficient directeur.*

Intégrande : Si $t = 3x+1$, alors $\dfrac{\ln(3x+1)}{3x+1} = \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Conclusion : par changement de variable,

$$I = \int_4^7 \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{3}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\ln(t)^2]_4^7 = \frac{1}{6}(\ln(7)^2 - \ln(4)^2).$$

Exemple 40

En fait, on peut calculer cette intégrale sans changement de variable (exercice moyen pour vous). Mais ici, on peut aussi vouloir poser $t = 3x+1$ pour se retrouver avec une exponentielle "simple".

Effectuons le changement de variable affine "$y = 3x+1$" dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x$.

Bornes : si $x = 1$, alors $y = 3x+1 = 4$ et si $x = 2$, alors $y = 7$.

Différentielle : Si $y = 3x+1$ alors $\mathrm{d}y = 3\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}y$.

Intégrande : Si $y = 3x+1$, alors $x = \dfrac{y-1}{3}$ donc $xe^{3x+1} = \dfrac{y-1}{3}e^y$. *Ici, on doit inverse la relation pour le changement d'intégrande.*

Par changement de variable :

$$\int_1^2 xe^{3x+1}\mathrm{d}x = \int_4^7 \frac{y-1}{3}e^y\frac{1}{3}\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\int_4^7 (y-1)e^y\mathrm{d}y.$$

Exercice : finir le calcul par linéarité, et à partir du calcul de $\displaystyle\int_4^7 e^y\mathrm{d}y$ (facile) et de $\displaystyle\int_4^7 ye^y\mathrm{d}y$ (IPP en dérivant y).

3. Intégrales fonctions de leur borne(s)

Prenons la fonction $\phi : t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$. Si on savait calculer une primitive de l'intégrande $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, alors il suffirait de l'utiliser pour avoir une formule sans intégrale de ϕ. Mais ici, c'est impossible. Tout comme il n'y a pas d'expression dite "algébrique" (utilisant seulement sommes, quotients, produits) de la fonction exponentielle à l'aide des autres fonctions usuelles (la plus proche étant la somme infinie $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$), il n'y a pas d'expression "sympathique" des primitives de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

En revanche, pour travailler avec une fonction comme $\phi : t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$, on peut :

- *Considérer de manière abstraite une primitive F de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur un domaine convenable, à savoir un segment contenant les bornes de l'intégrale, puis*
- *Utiliser F et la définition de l'intégrale dans nos calculs.*

Regardons comment cela se passe sur l'exemple 40.

Exemple 41

(i) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc sur chaque intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et est non définie en 0. Donc pour que $\phi(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ soit bien défini comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, il faut et il suffit que $t \in \mathbb{R}_+^*$ (car $1 \in \mathbb{R}_+^*$).

$\boxed{\text{Ainsi, } \phi \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(ii) Par continuité, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \phi(t) = \int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1).$$

Mais F et $t \mapsto F(1)$ sont dérivables sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$ donc ϕ est dérivable sur cet intervalle ouvert, et :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \phi'(t) = F'(t) - 0 = \frac{e^t}{t}}$$

car F est une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) Indication : Il faut minorer l'intégrande par $\dfrac{1}{x}$ (beaucoup d'autres minorations sont possibles et concluent) et utiliser la croissance de l'intégrale (valable pour $t \geq 1$). On obtient :

$$\forall t \geq 1, \phi(t) \geq \int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^t = \ln(t).$$

et on conclut, par passage à la limite des inégalités, que $\phi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

(iv) *C'est un peu comme la précédente, mais en plus difficile. Il faut être prudent pour la limite en 0, car lorsqu'on veut faire tendre t vers 0, t va se retrouver inférieur à 1 donc les bornes de l'intégrale ne seront pas dans l'ordre croissant. On procède ainsi.*

Soit $t \in]0,1]$.

Alors, $\phi(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x = \int_t^1 -\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x.$

Or, par croissance de l'exponentielle :

$$\forall x \in [t,1], \frac{e^t}{x} \leq \frac{e^x}{x} \text{ (car} x > 0)$$

donc :

$$\forall x \in [t,1], -\frac{e^t}{x} \geq -\frac{e^x}{x}.$$

Par intégration des inégalités ($t \leq 1$):

$$\int_t^1 -\frac{e^t}{x}\mathrm{d}x \geq \phi(t).$$

Enfin *(e^t "est une constante pour l'intégrale par rapport à x")*,

$$\int_t^1 -\frac{e^t}{x}\mathrm{d}x = -e^t \int_t^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -e^t(0 - \ln(t)) = e^t \ln(t).$$

On a donc démontré :

$$\forall t \in]0,1[, e^t \ln(t) \geq \phi(t).$$

Mais $e^t \ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $]0,1[$ est un voisinage à droite de 0 donc par comparaison :
$\boxed{\phi(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty.}$

Exemple 42

Même morale. Ces exercices peuvent faire peur au début, mais sont en fait assez simple (pour les premières questions) lorsqu'on a compris qu'il suffit de considérer de manière abstraite une primitive de l'intégrande.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (pour vous) donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons F une telle primitive.

Soit ϕ la fonction donnée par $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$. Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, $\phi(x)$ est bien défini comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment pour tout réel x *(le segment d'extrémités x et x^2).*

Donc ϕ est définie sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x).$$

Or, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme primitive de f), et $x \mapsto F(x^2)$ également (comme composée de fonctions dérivables), donc ϕ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\frac{\ln(1+x^4)}{1+x^8} - \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}.$$