TD de mathématiques n°18 : Intégrale des fonctions continues sur un segment

Pour commencer

Primitives et intégrales

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions données par les formules suivantes, en donnant les intervalles de validité maximaux.

(a) $f(x) = (x-1)^2$

(b) $f(x) = 2x\left(x^2-1\right)^2$

(c) $f(x) = x\left(1-x^2\right)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(i) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

(j) $f(x) = x\sqrt{x}$

(k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(m) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$

(n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(o) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

(p) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

(q) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(r) $f(x) = e^{-x}$

(s) $f(x) = e^{-3x}$

(t) $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^*$

(u) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(v) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(w) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

(x) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

(y) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$

(z) $f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}, \lambda \in \mathbb{R}^*$

Exercice 2

(a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$.
Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x$.
Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de primitives :

(a) $I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x - 1dx$

(b) $I_2 = \int_{-3}^{-1} \frac{\left(\ln(x^2)\right)^3}{x}dx$

(c) $I_3 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

(d) $I_4 = \int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

(e) $I_5 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(f) $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$

(g) $I_7 = \int_0^{\ln 3} e^{-x}dx$

(h) $I_8 = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(i) $I_9 = \int_2^e \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

(j) $I_{10} = \int_1^2 5^x dx$

(k) $I_{11} = \int_{-3}^5 x + \sqrt{x^2}dx$

(l) $I_{12} = \int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$

(m) $I_{13} = \int_1^3 \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

(n) $I_{14} = \int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|dx$

(o) $I_{15} = \int_0^1 \frac{x}{2-x^2}dx$

Exercice 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^x$ et $g(x) = x^2e^x$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$, puis en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$, puis en déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

(a) Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \geq 1 \\ x-1 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que f est continue et calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \leq n$. Calculer $\displaystyle\int_m^n \lfloor x \rfloor$.

Intégration par parties

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes par intégrations par parties :

(a) $I_1 = \int_{-1}^{1} xe^{-x}dx$

(b) $I_2 = \int_{-1}^{1} x^3e^{-x^2}dx$

(c) $I_3 = \int_1^e (\ln x)^3dx$

(d) $I_4 = \int_1^e x^2 \ln x dx$

(e) $I_5 = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

(f) $I_6 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

(g) $I_7 = \int_1^e x^2(\ln x)^3dx$

(h) $I_8 = \int_1^e \ln x dx$

(i) $I_9 = \int_0^1 x^2e^xdx$

(j) $I_{10} = \int_0^3 \left(x^2+x+1\right)e^{-2x}dx$

(k) $I_{11} = \int_1^e (\ln x)^2dx$

(l) $I_{12} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx$

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{x^n}{n+1}dx$.

(c) En déduire explicitement I_n en fonction de n.

Exercice 8 Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$.
Indication : on pourra s'intéresser à la division euclidienne de X^2 par $X+1$.

Changement de variable

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

(a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}dx, y = 2x+1$

(b) $I_2 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx, y = \sqrt{x}$

(c) $I_3 = \int_1^2 \frac{2x}{3x^2+1}dx, y = x^2$

(d) $I_4 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx, y = \ln x$

(e) $I_5 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx, y = 1+2x$

(f) $I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx, y = \sqrt{x}$

(g) $I_7 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}dx, y = \frac{x}{x+1}$

(h) $I_8 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}dx, y = 1+e^x$

(i) $I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}dx, y = x^3$

(j) $I_{10} = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx, y = e^{\sqrt{x}}$

(k) $I_{11} = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx, y = x^2$

(l) $I_{12} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx, y = \sqrt{1+e^x}$

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ en posant le changement de variable $s = \frac{1}{t}$.

Théorème fondamental de l'analyse, intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 11

(a) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto 1+\ln x$ qui s'annule en 1.

(b) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0 .

Exercice 12 Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_1^x |\ln t|dt$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Exercice 13 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (préciser le domaine) :

(a) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$

(b) $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$

(c) $J(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(t+2)}dt$

(d) $G(x) = \int_{-x}^x \sqrt{1+t^2}dt$

(e) $I(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2}dt$

(f) $K(x) = \int_0^{e^x} \frac{t}{\ln(t+2)}dt$

Exercice 14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

(a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

(b) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

(c) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (On pourra introduire une primitive G de $g : t \longmapsto e^{-t^2}$ et exprimer F en fonction de G).

(d) Dresser le tableau de variations de F en précisant la valeur de $F(0)$.

(e) Montrer que pour tout $x > 0, xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

(f) Étudier la convexité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Intégration des inégalités

Exercice 15 Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

(a) On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ et un segment $J \subset [a, b]$ de longueur non nulle, tels que : $\forall x \in J, f(x) \geq m$.

(b) En déduire une autre démonstration du résultat du cours suivant : si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Exercice 16

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, 1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + t^2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n+2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{n-1} + I_n$.

(c) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire I_0.

(b) Calculer I_1 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

(d) En minorant $1 - x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 19 Pour tout $t \geq 2$, on pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^2}$.

(a) Dresser le tableau de variations de f sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $k \geq 3$, $\frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 3$, $\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n f(t)dt$.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Exercice 20 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$. On suppose $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b-a$, que dire de f ?

Exercice 21 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (où $a < b$). On appelle ***valeur moyenne de f sur*** $[a,b]$ le réel $M_{a,b} := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Montrer que cette valeur moyenne est atteinte sur $[a,b]$:

$$\exists c \in [a,b], f(c) = M_{a,b}.$$

On pourra chercher deux démonstrations.

Exercice 22 *Bien plus difficile.* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (f(t))^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Indication : "Soit* $\epsilon \in]0,1[$*".*

Pour continuer

Primitives et intégrales

Exercice 23 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$, $\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}dx$.

Exercice 24 Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}(c \neq 0)$. Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\left(a - \frac{ad-bc}{cx+d}\right)$ pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$.

En déduire une primitive de $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Intégration par parties

Exercice 25 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{1+X^2}$. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

Changement de variable

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est paire. Montrer que pour tout $x > 0, \int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$.

(b) On suppose que f est impaire. Montrer que pour tout $x > 0, \int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$.

Exercice 27 Montrer que pour tout $x > 0$, pour tout $y > 0, \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ et le changement de variable $s = \frac{t}{x}$.

Théorème fondamental de l'analyse, intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 28 Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto xe^x$.

Exercice 29 Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ et $G(x) = F(x) - \ln x$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations

(b) Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.

(c) Déterminer les limites de F en 0^+et en $+\infty$.

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 .

Intégration des inégalités

Exercice 31 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx, J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ et $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4}dx$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$.

Exercice 32 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 33 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n puis calculer I_0 et I_1.

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\ln 2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\ln 2 - I_n$ sous forme d'une intégrale et en déduire que $\ln 2 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.