Programme de colle n^o 25 : Espaces vectoriels (fin), intégrales des fonctions continues sur un segment.

Semaine du lundi ***5 mai****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Espaces vectoriels (fin)

25.1 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Une famille est une base d'un sous-espace F ssi elle est à la fois libre et génératrice de F.

25.2 Théorème admis : tout sous-espace vectoriel F de E admet une base, et toute les bases de F sont de même cardinal. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.

25.3 Théorème admis : soit F un sous-espace vectoriel de E, alors toute famille libre (resp. génératrice) de F est constituée d'au plus (resp. au moins) $\dim(F)$ vecteurs, et cas d'égalité.

25.4 Inclusion de sous-espaces et dimensions.

Intégrales des fonctions continues sur un segment

25.5 Aire orientée $\mathcal{A}_f(a,b)$ sous la courbe d'une fonction f continue entre a et b. Relation de Chasles pour les aires orientées. Théorème : $\mathcal{A}_{f,a} : x \mapsto \mathcal{A}_f(a,x)$ est dérivable, de dérivée f.

25.6 Primitive d'une fonction sur un intervalle. Théorème admis : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Théorème de structure des primitives d'une fonction sur un intervalle. Existence et unicité d'une primitive F d'une fonction continue f sur un intervalle I vérifiant $F(x_0) = y_0$, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

25.7 Primitives usuelles, règles de calcul des primitives héritées des règles de dérivation.

25.8 Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux points de I, alors $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie sur I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Vocabulaire : intégrande et borne.

25.9 Le théorème fondamental de l'analyse.

25.10 Relation de Chasles, orientation de l'intégrale. Intégrales de fonctions paires, impaires. Linéarité de l'intégrale.

Python

25.11 Graphes : Détermination de la classe de connexité d'un sommet à l'aide d'un parcours en largeur.

25.12 Statistiques descriptives univariées : Population, échantillon, variable statistique quantitative discrète. Série statistique brute. Modalités, effectif, fréquence. Série statistique dépouillée. Effectifs cumulés, fréquences cumulées.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de dimension d'un sous-espace vectoriel, ainsi que la proposition (58) justifiant cette définition. Donner les dimensions des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ en justifiant.
2. Énoncer la proposition (65) admise relative au cardinal des famille libre ou génératrice d'un sous espace vectoriel F de E. Montrer que $((1,1,0),(0,0,1),(2,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Énoncer et démontrer la proposition liant la notion de dimension à l'inclusion de sous-espaces vectoriels.
4. Définir la notion de primitive d'une fonction sur un intervalle. Donner les 4 règles suivantes relatives au calcul de primitives (au choix de l'interrogation, parmi les règles de pages 5 ou 6 du cours).
5. Énoncer et démontrer le théorème de structure des primitives d'une fonction sur un intervalle.
6. Énoncer et démontrer la proposition (11) assurant l'existence et l'unicité d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle vérifiant une certaine condition. Déterminer l'unique primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $F(3) = 1$.
7. Énoncer la proposition et définition définissant, sous hypothèses, la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

8. Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.
9. Énoncer et démontrer la relation de Chasles et la propriété (23) d'orientation de l'intégrale.
10. Énoncer et démontrer la proposition relative aux intégrales de fonctions paires ou impaires.
11. Écrire une fonction `ClasseConnexite` prenant en entrée la liste `L` des listes d'adjacences d'un graphe et un sommet `s` de ce graphe, et renvoyant en sortie la classe de connexité du sommet `s` (sous forme de liste), à l'aide d'un parcours en largeur.
12. Écrire une fonction `Depouille` prenant en entrée une série statistique brute (sous forme de liste) et renvoyant en sortie la série statistique dépouillée obtenue en dépouillant celle-ci.