

Devoir surveillé numéro 6 : Concours blanc 1

Devoir du 28 avril 2025.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Analyse*

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de C

1. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
(c) En déduire le sens de variation de f .
2. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) f est-elle injective, surjective ou bijective ?
(c) Étudier l'existence d'asymptotes obliques à C en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Écrire un code Python permettant de tracer la courbe de f entre -10 et 10 .
4. On veut calculer les dérivées successives de f .

(a) Déterminer un polynôme P_1 tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{P_1(x)}{1 + x^2}$.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^n}$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(X) = -2nXP_n(X) + (1 + X^2)P'_n(X)$.

- (c) En déduire une expression de f'' et de $f^{(3)}$.
- (d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, P_n est de degré n .
5. (a) Dresser le tableau de variation complet de f' et tracer l'allure de sa courbe.
(b) Déterminer les extrema locaux et globaux de f' .
(c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2|x|$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

6. Montrer que la suite u est décroissante.
7. Montrer que u converge et déterminer sa limite.
8. Écrire un code Python qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
9. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
(c) Établir que $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge.
10. Peut-on déduire directement du résultat précédent que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ?

Exercice 2 Algèbre

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie I : étude des valeurs propres de A

On dit qu'un réel λ est **une valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur $v \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $Av = \lambda \cdot v$.

Pour tout réel λ , on pose $E_\lambda(A) = \{v \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid Av = \lambda \cdot v\}$.

1. A est-elle inversible ?
2. Déterminer un vecteur $V_1 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AV_1 = 0_{3,1}$, et dont le coefficient d'indice $(1, 1)$ vaut 1. En déduire que 0 est une valeur propre de A .
3. On pose $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AV_2 et AV_3 . En déduire deux autres valeurs propres de A .
4. (a) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ?
(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $A - \lambda I_3$ est inversible, alors λ n'est pas valeur propre de A .
(c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A .
5. On considère la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans l'ordre, V_1 , V_2 et V_3 .
(a) Expliciter P , montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
(b) Montrer que $AP = PD$, et en déduire que $A = PDP^{-1}$.
6. Montrer que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
7. (a) Montrer que, pour tout réel λ , $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la dimension de $E_4(A)$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation $(E) : M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque.

On pose $N = P^{-1}MP$ où P est la matrice de la question 5.

8. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$.
9. Montrer : $N^2 = D \implies ND = DN$.
10. Montrer que $\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid XD = DX\}$ est l'ensemble des matrices diagonales de taille trois.
11. Déterminer toutes les matrices diagonales $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = D$.
12. En déduire une expression des solutions de l'équation (E) utilisant P .

Partie III : Intervention d'un polynôme

13. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on calculera, tel que $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ et $Q(4) = 2$.
14. On pose $B = Q(A)$. Calculer $Q(D)$. En déduire que B est solution de l'équation (E) .
15. Montrer que, pour toute matrice carrée F de taille trois :

$$AF = FA \iff BF = FB.$$

T.S.V.P

Exercice 3 Probabilités

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de trois urnes opaques U_1 , U_2 et U_3 d'apparence identique et contenant chacune n boules indiscernables au toucher.

L'urne U_1 contient $(n - 1)$ boules blanches et une boule noire.

L'urne U_2 contient n boules blanches.

L'urne U_3 contient $n - 2$ boules blanches et 2 boules noires.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I : modélisation informatique de tirages avec U_3

On écrit quelques fonctions Python liées à l'expérience aléatoire consistant à effectuer des tirages **sans remise** dans l'urne U_3 jusqu'à l'obtention d'une boule noire.

On considère qu'un tirage possible dans l'urne U_3 est donné, en Python, par une liste dont les éléments sont des chaînes de caractères 'B' (pour "Boule blanche") ou 'N' (pour "Boule noire"), donnant l'ordre dans lequel les boules seraient tirées si on vidait U_3 par des tirages sans remise.

Par exemple, dans le cas $n = 5$, dire que le tirage dans U_3 est donné par la liste

['N', 'B', 'B', 'N', 'B']

signifie qu'en tirant une à une ses boules, on obtient une boule noire au premier tirage, une boule blanche aux deuxième et au troisième tirage, une boule noire au quatrième tirage et une boule blanche au dernier tirage.

Les listes de cette forme (avec n quelconque) seront appelées des *listes-tirages*.

1. Recopier et compléter le code suivant pour qu'il définisse une fonction `Verification` prenant en entrée une liste `L` de longueur au moins 3, et renvoyant `True` si `L` est une liste-tirage, et `False` sinon.

```
def Verification(L):
    n=len(L)
    # Les éléments de L doivent être 'N' ou 'B'
    for i in range(n):
        if (L[i] != 'N' ... L[i] != 'B') :
            return(False)
    # Décompte du nombre de boules noires
    c=0
    for i in range(n):
        if ... :
            c=...
    # Le tirage doit comporter deux boules noires
    if c!=2:
        return(False)
    return(True)
```

2. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def NombreBlanches(L):` prenant en entrée une liste-tirage `L` et renvoyant en sortie le nombre de boules blanches tirées avant l'apparition de la première boule noire pour ce tirage.
3. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def ListeTirage(n,a,b):` prenant en entrée des entiers naturels n, a, b convenables ($n \geq 3$, a et b distincts entre 1 et n), et renvoyant en sortie la liste-tirage obtenue avec n boules, lorsque les boules noires sont placées aux tirages numéros a et b .
4. Écrire le code d'une fonction d'entête `def TousTirages(n):` prenant en entrée un entier $n \geq 3$ et renvoyant en sortie la liste constituée de toutes les listes-tirages possibles avec n boules dans l'urne.

Par exemple, `TousTirages(3)` doit renvoyer la liste (à l'ordre des sous-listes près):

```
[[ 'N', 'N', 'B' ], [ 'N', 'B', 'N' ], [ 'B', 'N', 'N' ]]
```

5. Recopier et compléter le code suivant pour qu'il affiche le nombre moyen (*moyenne empirique*) de boules blanches tirées avant l'apparition de la première boule noire si on réalisait cette expérience sur tous les tirages possibles, après avoir demandé l'entier n à l'utilisateur.

```
n=int(input("Entrez le nombre de boules dans l'urne"))
T=TousTirages(n)
NT=len(T)
M=0
for ... in ... :
    M=...
print( M/NT )
```

6. Dans cette question, on ne considère plus que les listes-tirages constituées de n boules.
- Exprimer, en fonction du nombre n de boules dans U_3 , le nombre $L(n)$ de listes-tirages possibles.
 - Soit $k \in [0, n-2]$. Combien de ces listes-tirages font apparaître exactement k boules blanches avant l'apparition de la première boule noire?
 - En déduire que le nombre $E(n)$ affiché par le code de la question 5 est donné par

$$E(n) = \frac{1}{L(n)} \sum_{k=0}^{n-2} k(n-k-1).$$

- Donner une expression simple de $E(n)$.

Partie II : Une expérience aléatoire avec U_1 et U_2

Dans cette partie, on choisit une des deux urnes U_1 ou U_2 au hasard, de manière équiprobable, et on tire une par une ses boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.

On note, pour tout $k \in [1, n]$, $[N = k]$ l'événement : "exactement k tirages ont été effectués lors de cette expérience aléatoire".

Dans quelques chapitres de cours, N désignera la "variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués".

On note également C_1 (respectivement C_2) l'événement "l'urne U_1 (respectivement U_2) a été choisie".

7. Montrer que, pour tout $k \in [1, n]$:

$$P_{C_1}([N = k]) = \frac{1}{n}.$$

8. Calculer $P_{C_2}([N = k])$ pour tout $k \in [1, n]$.

9. Montrer que, pour tout $k \in [1, n]$:

$$P([N = k]) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } k \in [1, n-1] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} & \text{si } k = n \end{cases}.$$

10. On pose $E(N) = \sum_{k=1}^n kP([N = k])$. Calculer $E(N)$. On dira que $E(N)$ est l'espérance de la variable aléatoire N .

Partie III : Une expérience aléatoire avec U_1

Dans cette partie, on effectue une succession de tirages **avec remise** dans l'urne U_1 jusqu'à avoir obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages. On admet qu'il est en pratique impossible que cette série de tirages ne s'arrête pas (et on considère donc qu'elle s'arrête systématiquement).

On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- l'événement noté $[T = k]$ donné par "exactement k tirages ont été effectués",
- l'événement noté $[U = k]$ donné par : "exactement k boules blanches ont été tirées".

Par exemple, si les tirages sont donnés par : "noire, noire, noire, blanche", alors $[T = 4]$ et $[U = 1]$ sont réalisés.

11. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité $P([T = k])$ est-elle non nulle ?
12. Montrer soigneusement que pour tout $k \geq 2$:

$$P([T = k]) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}.$$

13. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} kP([T = k])$ converge et calculer sa somme.
14. (a) Calculer $P([U = 1] \cap [T = 2])$.
(b) Calculer $P([U = 1] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geq 3$.
15. Soit j un entier tel que $j \geq 2$.
(a) Calculer $P([U = j] \cap [T = j + 1])$.
(b) Calculer $P([U = j] \cap [T = k])$ pour tout $k \geq 2$ tel que $k \neq j + 1$.
16. Pour quelles valeurs de k et j supérieures à 2 les événements $[U = j]$ et $[T = k]$ sont-ils indépendants ?
17. Justifier que $\sum_{k \geq 2} P([U = 1] \cap [T = k])$ converge et calculer la somme de cette série.

$$\text{On admet que } P([U = 1]) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([U = 1] \cap [T = k]).$$

18. Donner $P([U = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

— Fin de l'énoncé —