

Exercice 1. (Adapté de EML 2010)

1.a) $x \mapsto 1+x^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et $x \mapsto \ln(x)$ est une fonction usuelle $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ ($1+x^2 \geq 1$).
Par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x$ étant $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions.

1.b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(u(x))$ où $u: x \mapsto 1+x^2$, donc par linéarité et composition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1.c) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}.$$

Or, $1+x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe strict de $(1-x)^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc le tableau suivant:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(1-x)^2$	+	0	+
f			

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(f' est positive et s'annule un nombre fini de fois sur l'intervalle $(\mathbb{R})$)

2. a)

Par Somme: $1+x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. Or, $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

donc par composition: $\ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$

Donc par Somme: $f(x) = x - \ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Ex 1 P2

D'autre part:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} \right).$$

Or:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{x} = \frac{\ln(x^2)}{(x^2)^{1/2}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}.$$

Par croissance comparée: $\frac{\ln(t)}{t^{1/2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (car $1/2 > 0$)

donc par composition: $\frac{\ln(x^2)}{(x^2)^{1/2}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ (car $x^2 \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$).

Enfin, $1 + \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$ donc par composition, $\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Par quotient puis somme:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Finalement, $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x} \right) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$
(car cette égalité est valable sur le voisinage de $+\infty$ $\mathbb{R}^*$).

Conclusion:

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$$

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

2b) f est continue (car $\mathbb{R}^\infty$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (par 1.c)), donc par le théorème de la bijection monotone, f induit une bijection: $\mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= \mathbb{R}.$

Donc $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, donc injective et surjective.

EX1P3

$$2c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2},$$

$$\text{Or, on a vu : } \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{en 2a),}$$

Donc $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$: $\mathcal{C}$ admet une asymptote, celle-ci a pour pente 1.

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = -\ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Donc $\mathcal{C}$ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

$$\text{De plus, } \frac{\ln(1+x^2)}{x} = -\frac{\ln(1+(-x)^2)}{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

(par composition, car $\left. \begin{array}{l} \frac{\ln(1+t^2)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ -x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \end{array} \right\}$).

$$\text{Donc } \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \quad \text{et} \quad f(x) - x = -\ln(1+x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Pour les mêmes raisons, $\mathcal{C}$ n'a pas d'asymptote oblique en $-\infty$.

Finalement, $\mathcal{C}$ n'a pas d'asymptote oblique en $+\infty$ ou $-\infty$.

```
3. import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return(x - np.log(1+x**2))
listeX = np.linspace(-10, 10, 500)
listeY = [f(x) for x in listeX]
plt.plot(listeX, listeY)
plt.show()
```

Ex1P4

4a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$ donc on peut poser $P_1(x) = (1-x)^2$.

4. b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si il existe un polynôme P_n tel que: $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$,

alors celui-ci est forcément unique car donné par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (1+x^2)^n f^{(n)}(x)$$

(fonction bien définie car f est $\mathcal{C}^\infty$ donc $f^{(n)}$ existe).

Il reste à montrer l'existence de ces polynômes, et la relation donnée.

Montrons par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q(n): \exists P_n \in \mathbb{R}[x], \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

Initialisation: $Q(1)$ a été démontré en 4a).

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q(n)$. Montrons $Q(n+1)$.

Par $Q(n)$, on dispose de $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

$f^{(n)}$ est alors dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{P_n'(x) \times (1+x^2)^n - P_n(x) \times n(1+x^2)^{n-1} \times 2x}{(1+x^2)^{2n}} \quad (n \geq 1)$$

$$= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - 2nx P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \quad (2n - (n-1) = n+1)$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}},$$

où l'on a posé $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2nx P_n(x)$.

(on a bien $P_{n+1} \in \mathbb{R}[x]$ car $P_n \in \mathbb{R}[x]$ et $P_n' \in \mathbb{R}[x]$).

EX1PS.

Ceci démontre P_{n+1} , d'où l'hérédité.

On a bien montré, à l'aide de la récurrence et du raisonnement précédent: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! P_n \in \mathbb{R}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

Enfin, on a obtenu dans l'hérédité:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = -2nXP_n(x) + (1+x^2)P_n'(x).$$

4.c) On avait $P_1(x) = (1-x)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Donc par 4b): } P_2(x) &= -2X(1-X)^2 + (1+X^2)(1-X) \times (-2) \\ &= -2X + 4X^2 - 2X^3 - 2 - 2X^2 + 2X + 2X^3 \\ &= 2X^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P_2(x) = 2(X^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{puis } P_3(x) &= -2 \cdot 2X P_2(x) + (1+X^2) P_2'(x) \\ &= -4X2(X^2-1) + 4X(1+X^2) \\ &= -4X^3 + 12X \\ &= -4(X^3 - 3X) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f''(x) = \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2} \\ f^{(3)}(x) = -\frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3} \end{cases}$$

4.d) Montrons par récurrence $\forall n \geq 2$, $\mathcal{H}(n)$: " $\deg(P_n) = n$ "

Initialisation: $P_2(x) = 2x^2 - 2$ d'après 4.c), donc $\deg(P_2) = 2$,
d'où $\mathcal{H}(2)$.

Ex 1P6

Hérédité: Soit $n \geq 2$. Supposons $I(n)$ et montrons $I(n+1)$.

D'après (b), $P_{n+1}(X) = -2nX P_n(X) + (1+X^2)P_n'(X)$.

Par l'hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n$ donc on dispose

de réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$
 $a_n \neq 0$

$$\text{Alors, } -2nX P_n(X) = \sum_{k=0}^n -2n a_k X^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} -2n a_{j-1} X^j \quad (j=k+1)$$

$$\text{et } (1+X^2)P_n'(X) = (1+X^2) \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \quad (n \geq 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k+1}$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) a_{j-1} X^j + P_n'(X)$$

Alors:

$$P_{n+1}(X) = \sum_{j=1}^{n+1} -2n a_{j-1} X^j + \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) a_{j-1} X^j + P_n'(X)$$

Isolons les termes de degré $n+1$:

$$P_{n+1}(X) = -2n a_n X^{n+1} + n a_n X^{n+1} + R(X),$$

$$\text{où } R(X) = \sum_{j=1}^n -2n a_{j-1} X^j + \sum_{j=2}^n (j-1) a_{j-1} X^j + P_n'(X).$$

Or, $\deg(P_n) = n$ donc $\deg(P_n') \leq n-1 \leq n$.

Donc $\deg(R(X)) \leq n$, car R est somme de polynômes de degrés au plus n .

$$\text{Ainsi, } P_{n+1}(X) = -n a_n X^{n+1} + R(X).$$

Ex 1 p 7.

$$\text{Enfin, } \begin{cases} \deg(-n a_n x^{n+1}) = n+1 & (\text{car } -n a_n \neq 0 \text{ car } a_n \neq 0) \\ \deg(R(x)) \leq n & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} P_{n+1}(x) = -n a_n x^{n+1} + R(x) \\ \deg(-n a_n x^{n+1}) > \deg(R(x)) \end{cases}$$

$$\text{donc } \deg(P_{n+1}(x)) = \deg(-n a_n x^{n+1}) = n+1.$$

D'où $\mathcal{H}(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence: $\forall n \geq 2, \deg(P_n) = n$.

5a) On a obtenu:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \quad (q.o.c.)$$

Or, $\frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe strict de $x^2-1 = (x-1)(x+1)$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc le tableau suivant:

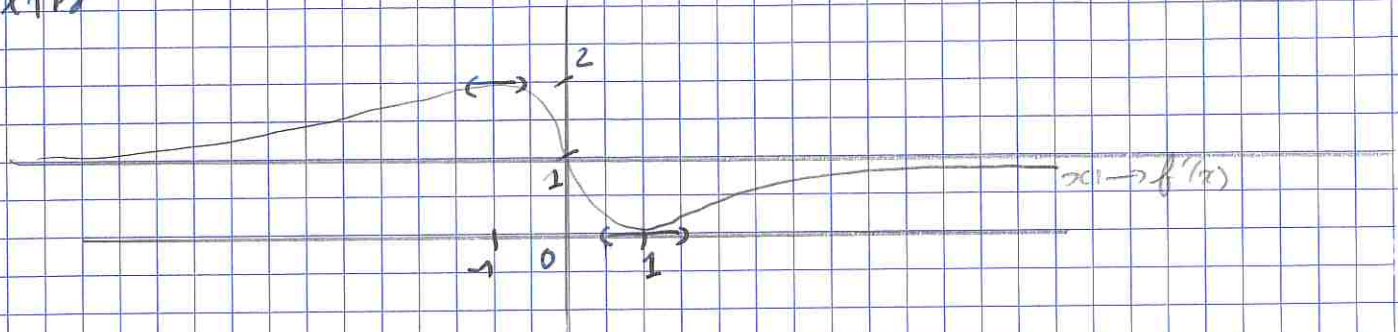
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	1	$\nearrow 2$	$\searrow 0$	$\nearrow 1$	

$$\text{De plus, } f'(1) = 1 - \frac{2}{1+1^2} = 0 \text{ et } f'(-1) = 1+1 = 2.$$

$$\text{Enfin, } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 - \frac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})} \text{ donc sans forme indéterminée.}$$

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1.$$

La courbe de f' admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.



5b) La dérivée f'' de f' ne s'annule qu'en 1 et -1.

$\mathbb{R}$ n'ayant pas d'extrémités, par condition nécessaire d'extrémum local, f' a au plus deux extréma locaux : en 1 et en -1.

De plus, f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en -1.

Donc f' a exactement deux extréma locaux, et vu les changements de signes de f'' :

f' admet un minimum local en 1 et un maximum local en -1 (valant respectivement 0 et 2).

Enfin, on a vu question 1c): $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$.

Donc f' admet un minimum global en 1.

Enfin, f' admet un maximum global en -1 valant 2

car:

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{2x}{1+x^2} \leq 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x \geq -1-x^2 \quad (1+x^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0,$$

et la dernière inégalité est toujours vraie.

Ex 1 P9

5c). On a démontré dans la question précédente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 2.$$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2$.

D'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |f(b) - f(a)| \leq 2|b - a|.$$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(0)| \leq 2|x - 0|$

d'où ($f(0) = 0$): $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2|x|$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(1+x^2) \geq 0$ car $1+x^2 \geq 1$ et $t \mapsto \ln(t)$ est croissante.

Donc $x - \ln(1+x^2) \leq x$.

D'où: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$.

En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

7. Montrons par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n): u_n \geq 0$.

Initialisation: $u_0 = 1 \geq 0$, d'où $P(0)$.

Hérédité: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n): u_n \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(u_n) \geq f(0) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} u_{n+1} \geq 0 \in P(n+1)$.

(1): Par croissance de f , (2): $f(0) = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

D'où l'hérédité.

On a donc montré par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

EX1P10

Par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en tant que suite décroissante (gob) et minorée.

Notons l sa limite.

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l.$$

Mail par composition, f étant continue sur $\mathbb{R}$ donc en l :

$$u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l).$$

Par unicité de la limite d'une suite:

$$f(l) = l.$$

$$\text{Donc } l - \ln(1+l^2) = l \quad \text{donc} \quad \ln(1+l^2) = 0 \text{ d'où } 1+l^2 = 1 \\ \text{puis } l^2 = 0.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = 0$.

8. `import numpy as np`

```
def f(x):  
    return (x - np.log(1 + x**2))  
n = 0  
u = 1  
while u > 10**-3:  
    u = f(u)  
    n += 1  
print(n)
```

9a) Soit $g:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + \frac{1}{2}x^2$.

g est dérivable car f et $-x + \frac{1}{2}x^2$ le sont, et:

$$\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = f'(x) - 1 + x$$

$$= -\frac{2x}{1+x^2} + x = \frac{x^3 - x}{1+x^2} = \frac{x(x^2 - 1)}{1+x^2}.$$

EX1P11

$$\text{Or, } \forall x \in [0,1], \begin{cases} x > 0 \\ 1+x^2 > 0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases} \text{ car } |x| \leq 1$$

donc: $\forall x \in (0,1), g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur $[0,1]$:

$$\forall x \in (0,1), g(x) \leq g(0) = 0$$

$$\text{D'où: } \underline{\forall x \in (0,1), f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2}$$

9b) D'après la question précédente:

$$\forall x \in [0,1] \quad x^2 \leq 2(x - f(x))$$

Or, par décroissance de u : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = 1$.

On a montré que u est positive, donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in (0,1]$$

D'après l'inégalité précédente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq 2(u_n - f(u_n)) \text{ d'où:}$$

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})}$$

9c)

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \quad \sum_{k=0}^n 2(u_k - u_{k+1}) = 2 \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = 2(u_0 - u_{n+1}) \text{ car}$$

on reconnaît une somme télescopique

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n 2(u_k - u_{k+1}) = 2(u_0 - u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(u_0 - 0) \text{ car } \begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Donc $\sum_{k \geq 0} 2(u_k - u_{k+1})$ converge. Or, par 9b):

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq u_k^2 \leq 2(u_k - u_{k+1}) \quad (\text{tout terme est positif})$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs:

$$\underline{\sum_{k \geq 0} u_k^2 \text{ converge}}$$

Ex1P12

10. Non, la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ n'implique pas directement celle de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Par exemple, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, d'après les critères sur les séries de Riemann.

Exercice 2 (adapté de EML 2009)

1. A est triangulaire supérieure et admet un coefficient diagonal nul.

Par théorème, A n'est pas inversible.

2. On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on pourrait résoudre un système simple également).

$$\text{Ainsi, } AV_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}.$$

Donc $AV_1 = 0 \cdot V_1$, et $V_1 \neq 0_{3,1}$ car son coefficient d'indice (1,1) vaut 1.

Donc 0 est valeur propre de A .

$$3. \quad AV_2 = \begin{pmatrix} 0+1+0 \\ 0+1+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = V_2 \quad \text{et} \quad AV_3 = \begin{pmatrix} 0+1+3 \\ 0+1+3 \\ 0+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 V_3.$$

Donc $\begin{cases} AV_2 = 1 \cdot V_2 \\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \end{cases}$ 1 est valeur propre de A .

De même, $\begin{cases} AV_3 = 4 \cdot V_3 \\ V_3 \neq 0_{3,1} \end{cases}$ donc 4 est valeur propre de A .

4a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{donc } A - \lambda I_3 \text{ est triangulaire}$$

supérieure: elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux $-\lambda$, $1-\lambda$ et $4-\lambda$ sont tous non nuls.

Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{0, 1, 4\}$.

E2P2

4.b) Supposons $A - \lambda I_3$ inversible (i.e. $\lambda \notin \{0, 1, 4\}$).

$$\forall v \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), Av = \lambda \cdot v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow A \times v - \lambda I_3 \times v = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_3) v = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow v = (A - \lambda I_3)^{-1} 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow v = 0_{3,1}$$

(car: $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M 0_{3,1} = 0_{3,1}$).

Donc l'unique $v \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Av = \lambda \cdot v$ est le vecteur nul: par définition, λ n'est pas valeur propre de A .

On a bien montré: si $A - \lambda I_3$ est inversible, alors λ n'est pas valeur propre de A .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.c) D'après 4.a) et 4.b), si $\lambda \notin \{0, 1, 4\}$, alors λ n'est pas valeur propre de A .

D'après 2. et 3., 0, 1 et 4 sont valeurs propres de A .

Donc les valeurs propres de A sont 0, 1 et 4.

5.a) On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \forall Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}):$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E2P3

5b)

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $AP = PD$.

P étant inversible, $APP^{-1} = PDP^{-1}$ d'où ($PP^{-1} = I_3$):

$$\underline{A = PDP^{-1}}$$

6). Montrons que (v_1, v_2, v_3) est libre.

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a=b=c=0.$$

(1): (S) est de Cramer car triangulaire à coefficients diagonaux non nul et admet $a=b=c=0$ comme solution car (S) est homogène.

Donc (v_1, v_2, v_3) est libre.

Or, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$: (v_1, v_2, v_3) est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

en tant que famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de 3 vecteurs.

7a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(i) \quad 0_{3,1} \in E_\lambda(A) \text{ car } \begin{cases} A \cdot 0_{3,1} = 0_{3,1} \\ \lambda \cdot 0_{3,1} = 0_{3,1} \end{cases}$$

(ii) $E_\lambda(A) \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est clair par définition de $E_\lambda(A)$.

E2P4 (iii) Soit $(u, v) \in (E_\lambda(A))^2$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} A_\lambda(au + bv) &= A_\lambda(a \cdot u) + A_\lambda(b \cdot v) \\ &= a \cdot (Au) + b \cdot (Av) \\ &= a \cdot (\lambda \cdot u) + b \cdot \lambda \cdot v \quad (\text{car } (u, v) \in E_\lambda(A))^2 \\ &= \lambda \cdot (au + bv) \end{aligned}$$

Donc $au + bv \in E_\lambda(A)$.

Donc $E_\lambda(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

D'après la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels, (i), (ii) et (iii) donnent :

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$7.b) \quad E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} y + 3z = 4x \\ y + 3z = 4y \\ 4z = 4z \end{cases} \right\}$$

$$\text{Notons } (S) : \begin{cases} y + 3z = 4x \\ y + 3z = 4y \\ 4z = 4z \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y + 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_4(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y = z \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(V_3). \end{aligned}$$

Donc (V_3) est une famille génératrice de $E_4(A)$, et libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Donc (V_3) est une base de $E_4(A)$, d'où :

$$\underline{\dim(E_4(A)) = 1}.$$

EZPS

8. On a $N = P^{-1}MP$.

$$\text{Donc } PNP^{-1} = PP^{-1}MP^{-1} = M \quad (\text{car } PP^{-1} = I_3).$$

$$\text{Donc } M^2 = (PNP^{-1})^2 = PNP^{-1} \times PNP^{-1} = PN^2P^{-1} \quad (\text{car } P^{-1}P = I_3).$$

Alors :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow PNP^{-1} = A \Leftrightarrow N^2 = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow N^2 = P^{-1}PD P^{-1}P \\ &\Leftrightarrow N^2 = D. \end{aligned}$$

Donc $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

9. Supposons $N^2 = D$.

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} ND = N \times N^2 = N^3 \\ DN = N^2 \times N = N^3 \end{cases}$$

d'où $N^2 = D \Rightarrow ND = DN$.

10). Posons $F = \{ X \in M_3(\mathbb{R}) \mid XD = DX \}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

$$X \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 4c=0 \\ d=0 \\ e=e \\ 4f=f \\ g=0 \\ 4h=4h \\ 4i=4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=d=f \\ =g=h=i=0 \end{cases}$$

E2P8

Donc $X \in F \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Donc F est l'ensemble des matrices diagonales de taille 3.

11.

Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

D'après 9, si $X^2 = D$, alors $XD = DX$ donc X est diagonale d'après 10.

Réciproquement, supposons X diagonale et soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$X^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \text{ ou } b = -1 \\ c = 2 \text{ ou } c = -2 \end{cases}$$

Il y a donc exactement 4 matrices diagonales X telles que $X^2 = D$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons $N = P^{-1}MP$.

Par 8: $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

Or, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$ par 9, et N est donc diagonale par 10. D'après 11:

$$N^2 = D \Leftrightarrow N = X_1 \text{ ou } N = X_2 \text{ ou } N = X_3 \text{ ou } N = X_4.$$

Enfin, $N = PMP^{-1}$ donc :

$$M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in \{1, 4\}, M = PX_i P^{-1}.$$

E207.

Donc les solutions de (E) sont les matrices PX_iP^{-1} , pour $i \in \{1, 4\}$, où les X_i ont été définies question 11.

13. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on dispose de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \quad (\text{permutation de lignes})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -12b = -14 \\ c = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 16L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{7}{6} \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc l'unique $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ et $Q(4) = 2$ est $Q(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x$.

14.

$$\begin{aligned} Q(D) &= -\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = X_1. \end{aligned}$$

Donc $Q(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = X_1$.

Alors, $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } Q(A) &= -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} \\ &= PQ(D)P^{-1}. \end{aligned}$$

E2P8

Donc $B = Q(A) = PX, P^{-1}$.D'après 12., B est solution de (E).15. Soit $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons $AF = FA \Leftrightarrow BF = FB$. $\Leftarrow$: Supposons $BF = FB$. F et B commutent, donc F et B^2 commutent.D'après la question précédente, $B^2 = A$.Donc F et A commutent, d'où :

$$BF = FB \Rightarrow AF = FA.$$

 $\Rightarrow$: Réciproquement, supposons $AF = FA$. A et F commutent, donc A^2 et F aussi.Or, $B = Q(A)$:

$$\begin{aligned}
 BF &= \left(\frac{1}{6}A^2 - \frac{7}{6}A \right) F = \frac{1}{6}A^2 F - \frac{7}{6}AF = \frac{1}{6}FA^2 - \frac{7}{6}FA \\
 &= F \left(\frac{1}{6}A^2 - \frac{7}{6}A \right) \\
 &= FB.
 \end{aligned}$$

(F et A commutent)

D'où $AF = FA \Rightarrow BF = FB$.

Par double implication :

$AF = FA \Leftrightarrow BF = FB.$

Exercice 3 (adapté de Euclidean 2015)

1.

def Verification(L):

n = len(L)

for i in range(n):

if (L[i] != 'N' and L[i] != 'B'):

return(False)

c = 0

for i in range(n):

if L[i] == 'N':

c = c + 1

if c != 2:

return(False)

return(True)

2. def NombreBlanches(L):

c = 0 # compte les boules blanches tirées

for b in L: # Tirage des boules

if b == 'B':

c = c + 1

else: # renvoi de c à la première boule noire

return(c)

3. def ListeTirage(n, a, b):

L = ['B'] * n # liste ['B', 'B', ..., 'B'] de longueur n

L[a-1] = 'N' # Placement des noires,

L[b-1] = 'N' # attention au décalage d'indice.

return(L)

E3P2

4. def TousTirages(n):

G = [] # contiendra la liste voulue

for a in range(1, n):

for b in range(a+1, n+1):

G.append(ListeTirage(n, a, b))

return(G)

Les liste-tirages de longueur n sont celles de la forme ListeTirage(n, a, b) où $a \in [1, n-1]$ et $b \in [a+1, n]$ (a est le numéro du tirage donnant la 1^{re}, b la seconde).

5. On veut faire la moyenne des nombres renvoyés par NombreBlanches(L), pour L parcourant TousTirages(n):

n = int(input("Entrez le nombre de boules dans l'urne"))

T = TousTirages(n)

NT = len(T)

M = 0

for L in T:

M = M + NombreBlanches(L)

print(M/NT)

6a) Une liste-tirage de longueur n est exactement déterminée par la position de ses deux boules noires. Il y a n positions possibles, donc $\binom{n}{2}$ manières de choisir l'ensemble donnant les positions des deux boules noires.

$$L(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

6.b) Une liste-tirage faisant apparaître exactement k boules blanches avant sa première boule noire a sa première boule noire placée au $k+1$ -ième tirage, et est donc uniquement déterminée par la position de sa seconde boule noire à choisir dans $[k+2, n]$.

$$\text{Card}([k+2, n]) = n - (k+2) + 1 = n - k - 1 \text{ donc :}$$

Il y a $n - k - 1$ listes tirages de longueur n faisant apparaître k boules blanches (exactement) avant la première boule noire.

6.c) Notons $T_1, \dots, T_{L(n)}$ les nombres de boules blanches tirées avant la première boule noire pour chacune des $L(n)$ listes tirages possibles (dans un ordre quelconque). On a alors :

$$E(n) = \frac{1}{L(n)} \sum_{i=1}^{L(n)} T_i.$$

Or, la somme $\sum_{i=1}^{L(n)} T_i$ est constituée de termes éléments de $[0, n-2]$ (car il y a $n-2$ boules blanches dans U_2), et, d'après la question précédente, exactement $n-k-1$ de ceux-ci valent k (pour tout $k \in [0, n-2]$).

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^{L(n)} T_i = \sum_{k=1}^{n-2} k(n-k-1).$$

$$\text{D'où } E(n) = \frac{1}{L(n)} \sum_{k=1}^{n-2} k(n-k-1).$$

6.d)

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } E(n) &= \frac{2}{n(n-1)} \left((n-1) \sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{n-2} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{(n-2)(n-1)^2}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} \right) \end{aligned}$$

E3PL4

$$E(n) = \frac{n-2}{n} \left(1 - (n-1) - \frac{2n-3}{3} \right)$$

$$= \frac{n-2}{n} \times \frac{n}{3} = \frac{n-2}{3}$$

$$E(n) = \frac{n-2}{3}$$

7. Soit $k \in \{1, n\}$.

$P(C_1) = \frac{1}{2} \neq 0$ donc $P_{C_1}([N=k])$ est la probabilité d'avoir effectué k tirages exactement sachant qu'on a choisi l'urne U_1 .

Or, si l'urne U_1 est choisie (i.e. si C_1 est réalisée), l'expérience s'arrête au tirage de la boule noire.

$P_{C_1}([N=k])$ est donc la probabilité de tirer la boule noire dans U_1 au k^{e} tirage lors de tirages sans remise.

Les boules étant indiscernables, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées au k -ième tirage dans U_1 . Il y a n boules, donc par équiprobabilité de la k^{e} boule tirée :

$$P_{C_1}([N=k]) = \frac{1}{n}$$

8. Si C_2 est réalisée, les tirages se font dans U_2 donc le numéro de l'urne n'est connu qu'au dernier tirage, seul moment où l'on peut constater que l'urne choisie n'avait pas de boule noire.

Ainsi ($P(C_2) \neq 0$):

$$\forall k \in \{1, n\}, P_{C_2}([N=k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{1, n-1\} \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

9. (C_1, C_2) forme un système complet d'événements, et $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, n], P(N=k) &= P(C_1) P_{C_1}(N=k) + P(C_2) P_{C_2}(N=k) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times P_{C_2}(N=k) \quad (\text{par 8. et 9.}) \end{aligned}$$

$$\forall k \in [1, n], P(N=k) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } k \neq n \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10. E(N) &= \sum_{k=1}^n k P(N=k) = \sum_{k=1}^{n-1} k P(N=k) + n P(N=n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n-1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2n}{4} = \frac{3n+1}{4} \end{aligned}$$

$$E(N) = \frac{3n+1}{4}$$

11. Le nombre k de tirages effectués est d'au moins 2 (pour avoir une boule noire et une boule blanche), et pour tout $k \geq 2$, il est possible de tirer $k-1$ boules blanches puis une boule noire (car chaque tirage est fait avec au moins une boule de chaque couleur dans l'urne), donc $P(T=k) \neq 0$.

Donc $P(T=k)$ est non nul si et seulement si $k \geq 2$.

Rq : Cette question peut être augmentée plus finement.

Ex 3pb Soit $k \geq 2$.

12. Les tirages réalisant $[T=k]$ sont au nombre de 2:

* le tirage piochant d'abord $k-1$ fois une boule blanche puis la boule noire,

* le tirage piochant $k-1$ fois la noire, puis la blanche.

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i : "le i^{e} tirage a lieu et donne une boule blanche", et N_i : "le i^{e} tirage a lieu et donne une boule noire".

Alors: $[T=k] = (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$.

Cette réunion est disjointe (car par exemple, $N_1 \cap B_1 = \emptyset$)

donc:

$$P([T=k]) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

Or, $P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$ (il est possible de tirer $k-1$ boules blanches sur les $k-1$ premiers tirages) donc par la formule des probabilités composées:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k).$$

Enfin, (i) Le premier tirage a lieu et $P(B_1) = \frac{n-1}{n}$

(à chaque tirage, l'urne contient n boules dont $n-1$ blanches),

Pour tout

(ii) $\forall i \in [1, k-2]$, $P_{B_1 \cap \dots \cap B_i}(B_{i+1}) = \frac{n-1}{n}$ car si $B_1 \cap \dots \cap B_i$ est réalisé, le $i+1$ -ième tirage a lieu, et donne une boule blanche avec probabilité $\frac{n-1}{n}$.

(iii) $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n}$ car si $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$ est réalisé,

le k -ième tirage a lieu, et donne une boule noire avec probabilité $\frac{1}{n}$.

E3P7

Donc:
$$P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) = \underbrace{\frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-1}{n}}_{k-2 \text{ facteurs}} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1}.$$

De même:

$$P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = P(N_1) P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}.$$

Finalement:

$$\forall k \geq 2, P(\tau = k) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} + \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}.$$

13. $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$ donc ($n \neq 0$) $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$: $\frac{n-1}{n} \in]-1, 1[$.

Donc $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1}$ converge en tant que série géométrique dérivée d'ordre 1, et $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{n^2}{1^2} = n^2.$

De même, $\frac{1}{n} \in]-1, 1[$ ($n > 1$) donc $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}$ converge en tant que série géométrique dérivée d'ordre 1, et:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n^2}{(n-1)^2}.$$

Pan limite, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{n} \cdot k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} + \frac{n-1}{n} k \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}$ converge et:

E3 P8

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k P([T=k]) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot n^2 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)^2} \\ &= n + \frac{n}{n-1} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{n^2}{n-1}\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k \geq 1} k P([T=k])$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} k P([T=k]) = \frac{n^2}{n-1}$

14 a) $[U=1] \cap [T=2] = [T=2]$ car si $[T=2]$ est réalisé, exactement une boule de chaque couleur est tirée donc $[T=2]$ implique $[U=1]$.

Donc $P([U=1] \cap [T=2]) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^1 + \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1$
 $= 2 \frac{n-1}{n^2}$

14. b) Soit $k \geq 3$.

On a $[U=1] \cap [T=k] = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ car:

$$\begin{aligned}[U=1] \cap [T=k] &= [U=1] \cap ((N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k)) \\ &= ([U=1] \cap (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)) \cup ([U=1] \cap (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k))\end{aligned}$$

et $\begin{cases} [U=1] \cap (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k \\ [U=1] \cap (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) = \emptyset \end{cases}$ car si $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$ est réalisé, $k-2$ boules blanches sont tirées, et $k-2 \neq 1$.

D'après le calcul fait en 12: $P([U=1] \cap [T=k]) = \frac{n-1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$

$$15.a) [U=j] \cap [T=j+1] = B_1 \cap \dots \cap B_j \cap N_{j+1} \quad \text{car si } [T=j+1]$$

est réalisé; (i) ou bien une unique boule blanche est tirée, au $j+1$ -ième tirage, auquel cas $[U=j]$ n'est pas réalisé,
 (ii) ou bien les tirages sont constitués de j boules blanches suivies d'une noire, auquel cas $[U=j]$ est réalisé.

Donc :

$$\begin{aligned} P([U=j] \cap [T=j+1]) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_j \cap N_{j+1}) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{j-1}, \text{ d'après le calcul des 12.} \end{aligned}$$

15.b) Soit $k \geq 2$ tel que $k \neq j+1$.

Si $[T=k]$ est réalisé, alors le nombre de boules blanches tirées est de 1 ou $k-1$, donc est distinct de j ($j \geq 2$ et $k \neq j+1$).

Donc $[U=j]$ et $[T=k]$ sont incompatibles.

$$\underline{P([U=j] \cap [T=k]) = 0, \text{ pour tout } k \geq 2 \text{ tel que } k \neq j+1.}$$

16. Soit $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \geq 2$ et $j \geq 2$.

1^{er} cas : Si $k = j+1$,

$[U=j] \cap [T=k] = [U=j]$ car la seule possibilité pour avoir j boules blanches est de tirer j boules blanches suivies d'une boule noire, car $j \geq 2$, donc $[U=j] \subset [T=j+1]$.

$$\text{Donc : } P([U=j] \cap [T=k]) = P([U=j]).$$

Or, $P([T=k]) \neq 1$, car $[T=k]$ n'est pas certain. (voir q°11).

E3P10.

De plus, $P([u=j]) \neq 0$ car $P([u=j]) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$ (par 1sa)

Donc $P([u=j]) \neq P([u=j])P([T=k])$.

Donc $P([u=j] \cap [T=k]) \neq P([u=j])P([T=k])$.

Donc $[u=j]$ et $[T=k]$ ne sont pas indépendants.

2^e cas : Sinon, $k \neq j+1$.

Donc $P([u=j] \cap [T=k]) = 0$ par 1sb).

Or, $P([u=j])P([T=k]) \neq 0$ car $\begin{cases} k \geq 2 \text{ donc } P([T=k]) \neq 0 \\ P([u=j]) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^j \neq 0 \end{cases}$

Donc $[u=j]$ et $[T=k]$ ne sont pas indépendants.

Dans tous les cas, $[u=j]$ et $[T=k]$ sont non-indépendants, pour tous $j \geq 2$ et $k \geq 2$.

$$17. \forall k \geq 3, P([u=1] \cap [T=k]) = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

Où, $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{n} \in]-1, 1[$ ($n \geq 3$), et $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$

$$= \frac{1}{n(n-1)}$$

Par changement d'indice (posant $j = k+1$), et linéarité :

$$\sum_{j \geq 3} \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{j-1} \text{ converge et } \sum_{j=3}^{\infty} \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{j-1} = \frac{n-1}{n} \sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{j-1}$$
$$= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$
$$= \frac{1}{n^2}$$

E3P11

$\frac{1}{2}$ Donc $\sum_{k \geq 3} P([U=1] \cap [T=k])$ converge, donc $\sum_{k \geq 2} P([U=1] \cap [T=3])$

aussi et:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P([U=1] \cap [T=k]) = P([U=1] \cap [T=2]) + \sum_{k=3}^{+\infty} P([U=1] \cap [T=k])$$

$$|_{\text{par (4a)}} = 2 \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}$$

$$\text{Donc } P([U=1]) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([U=1] \cap [T=k]) = \frac{2n-1}{n^2}$$

18. Par la question précédente: $P([U=1]) = \frac{2n-1}{n^2}$,

et par le raisonnement de la question 15a):

$$\forall j \geq 2, \underline{P([U=j]) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^j}$$

