

Exercice 1 (Edhec 2010)

1. $u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2$

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right) \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$u_2 = u_1 \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$$

2.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = 2 \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Or: $\forall k \in \{1, \dots, n\}, 1 + \frac{1}{2^k} > 1$. Par produit d'inégalités à membres positifs:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) > \prod_{k=1}^n 1 = 1.$$

Donc (2.20): $u_n > 2 \times 1 = 2$.

On a montré: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 2$. De plus, $u_0 = 2 > 2$ donc:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.

2.b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$ donc ($u_n > 0$ car $u_n > 2$) $u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > u_n$ d'où:

$$u_{n+1} > u_n.$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3a) Étude de fonction classique.

3b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right).$$

ElP2 Or: $\forall k \in [0, n]$, $1 + \frac{1}{2^k} > 0$, donc:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

D'après l'inégalité de 3a) ($\frac{1}{2^k} > -1$ pour tout $k \geq 0$):

$$\forall k \in [0, n], \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Par somme d'inégalités:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$,
et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Cette série étant à termes positifs:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Donc d'après la question précédente:

$$\ln(u_n) \leq 2.$$

Par croissance de l'exponentielle: $u_n \leq e^2$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par e^2 .

Étant croissante (q. 2b), et majorée, $(u_n)_n$ converge par le théorème de la limite monotone. Notons l sa limite.

On a alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq e^2 \quad (u_0 \leq u_n \text{ car } (u_n) \text{ croissante}).$$

: Par passage à la limite des inégalités:

$$2 = u_0 \leq l \leq e^2.$$

Ainsi: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in [2, e^2]$.

E/P3

5.a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$1 \leq 1 + \frac{1}{2^k} \text{ donc } 0 = \ln(1) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

D'après 3a): $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.

Ainsi:
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \\ \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} \text{ converge (voir q.4)} \end{array} \right.$$

Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \text{ converge.}$$

Donc par définition:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

De plus, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et $l \geq 2$ donc $l \in \mathbb{R}_+^*$ donc $t \mapsto \ln(t)$ est continue en l . Ainsi:

$$\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l).$$

Par unicité de la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\ln(l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Conclusion: $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

5.b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$l > 0$ et $u_n > 0$ (car $u_n \geq 2$) donc $\ln\left(\frac{l}{u_n}\right) = \ln(l) - \ln(u_n)$.

Or, $\sum_{k \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge donc:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln(u_n) \text{ par 3b.}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}_{\ln(l) \text{ par 5.a.}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \ln(l) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{l}{u_n}\right), \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5.c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall k \geq n+1$, $0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ converge, donc

par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

(on sait déjà que les séries convergent).

$$\text{Or : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \quad (\text{série géométrique de raison } 2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

Donc finalement, vu le résultat de 3.b) :

$$0 \leq \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^n}, \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5.d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente :

$$0 \leq \ln\left(\frac{l}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Par croissance de l'exponentielle :

$$e^0 = 1 \leq \frac{l}{u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Donc ($u_n > 0$) :

$$u_n \leq l \leq u_n e^{\frac{1}{2^n}}$$

Donc $0 \leq l - u_n$.

De plus, $0 \leq \frac{l}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$ donc par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{u_n}{l} \geq e^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Donc $u_n \geq l e^{-\frac{1}{2^n}}$, d'où $-u_n \leq -l e^{-\frac{1}{2^n}}$ puis :

EIPS

$$l - u_n \leq l - l e^{-\frac{1}{2^n}} = l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}).$$

finalement:

$$0 \leq l - u_n \leq l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}), \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

S.e) $1 - e^{-x} \leq x$: On peut faire une étude de fonction où écrire:

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$-x = \ln(e^{-x}) = \ln(1 + (e^{-x} - 1)) \stackrel{(1)}{\leq} e^{-x} - 1.$$

(1): Car $e^{-x} - 1 > -1$ ($e^{-x} > 0$) et d'après 3.a).

$$\text{Donc (1) } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - e^{-x} \leq x.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente:

$$0 \leq l - u_n \leq l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}).$$

Or, $1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$ d'après l'inégalité précédente. Donc (1) $\Rightarrow$:

$$l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{l}{2^n}.$$

Par transitivité:

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{l}{2^n}, \text{ et ce pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

S.f) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Par linéarité, $\sum_{n \geq 0} \frac{l}{2^n}$ converge également.

$$\text{On: } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq l - u_n \leq \frac{l}{2^n}.$$

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs:

$$\sum_{n \geq 0} l - u_n \text{ converge.}$$

1. a) Tout d'abord, cet algorithme est possible car si, pour un certain $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\{v_1, \dots, v_i\}$ sont construits au cours de l'algorithme, deux possibilités:

1^{er} cas: si $i = n$, l'algorithme se termine.

2^e cas: si $i < n$, il existe un sommet v non élément de $\{v_1, \dots, v_i\}$ car G est d'ordre n .

G étant connexe, on dispose d'une chaîne reliant v_i à v :

$$v_i = s_0 - s_1 - \dots - s_{k+1} = v. \quad (k \text{ étant sa longueur}).$$

On peut alors prendre pour v_{i+1} le premier sommet de la liste $\{s_0, s_1, \dots, s_{k+1}\}$ n'appartenant pas à $\{v_1, \dots, v_i\}$.

Dans tout les cas, on peut poursuivre ou terminer cet algorithme. $\nearrow$

|| Rq: Cette justification est bon-barème.

Notons $v_1, \dots, v_n$ les sommets construits par cet algorithme.

Montrons que $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ est connexe pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Supposons par l'absurde que cela soit faux.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le plus petit entier tel que $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ n'est pas connexe.

$i \neq 1$ car $G[\{v_1\}]$ est connexe car contient un unique sommet.

Par choix de i , $G[\{v_1, \dots, v_{i-1}\}]$ est connexe.

Par construction de v_i , on dispose de $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$

tel que $v_i \sim_G v_j$.

E2P2

De plus, $G_{i-1} = G[\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_{i-1}\}]$ étant connexe, les sommets $v_1, \dots, v_{i-1}$ sont tous reliés à v_j par une chaîne de G_{i-1} , donc de $G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}]$.

Ainsi, dans G_i , tous les sommets de G_i sont reliés à v_j par une chaîne.

G_i serait donc connexe, car si s et s' sont deux sommets de G_i , une chaîne de s à v_j concaténée à une chaîne de v_j à s' donne une chaîne de s à s' .

(ceci contredit le choix de i ($G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ est non connexe)).

D'où le résultat:

$G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ est connexe pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

```
1.b) def Intersection(L, N):
    for a in L:
        if a in N:
            return(True)
    return(False)
```

```
1.c) def EnumereConnexes(V):
    L = [0] # contiendra [v1, ..., vn]. Choix v1 = 0.
    n = len(V) # ordre de G
    for i in range(n-1): # faire n-1 fois
        M = [i for i in range(n) if not(i in L)] # sommets ∉ L.
        for s in M:
            if Intersection(L, V[s]): # si s voisin d'un
                                     # sommet de L
                L.append(s)
                break # interrompt la boucle sur M
    return(L)
```

E2P3

2.a) Soit G un graphe, et s, s' deux sommets de G reliés par une chaîne.

Montrons que s et s' sont reliés par une chaîne simple.

Soit $\gamma = (s_0, \dots, s_{k+1})$ une chaîne de longueur k minimale de s vers s' :

$$\gamma: s = s_0 - s_1 - \dots - s_{k+1} = s'.$$

Montrons que γ est simple.

Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, γ emprunterait deux fois une même arête a . Soient i, j éléments de $\llbracket 1, k \rrbracket$ tels que $i < j$ et tels que $a = \{s_i, s_{i+1}\} = \{s_j, s_{j+1}\}$.

$$\gamma: s_0 = s - s_1 - \dots - s_i \xrightarrow{a} s_{i+1} - \dots - s_j \xrightarrow{a} s_{j+1} - \dots - s' = s_{k+1}.$$

Alors,

1^{er} cas: Si $s_i = s_{j+1}$, alors $\gamma': s_0 = s - s_1 - \dots - s_i - s_{j+2} - \dots - s'$ est une chaîne de s vers s' , de longueur inférieure à $k-2$.

2^d cas: Sinon, $s_i \neq s_{j+1}$. Alors:

$\gamma': s_0 = s - s_1 - \dots - s_i - s_{j+1} - s_{j+2} - \dots - s' = s_{k+1}$ est une chaîne de s vers s' de longueur au plus $k-1$.

Dans tous les cas, on a construit une chaîne de s vers s' de longueur strictement inférieure à k , ce qui est absurde, par choix de γ .

Donc γ est simple, d'où le résultat.

E2P4

2.b) Supposons G' connexe; montrons que G n'est pas acyclique.

Soient s et s' les sommets de G tels que $a = \{s, s'\}$.

G' étant connexe, on disposerait d'une chaîne γ de s vers s' , dans G' . Par la question précédente, on peut choisir une chaîne simple comme choix de γ .

Soient $s_0, \dots, s_{k+1}$ les sommets de G tels que:

$$\gamma: s_0 = s - s_1 - s_2 - \dots - s_{k+1} = s',$$

où k est la longueur de γ .

Notons γ' la chaîne de G obtenue en parcourant γ puis l'arête a :

$$\gamma': s_0 = s - s_1 - s_2 - \dots - s_{k+1} = s' - s.$$

γ' est une chaîne fermée de G .

De plus, γ est simple et ne passe pas par l'arête $s' - s$ car γ est une chaîne de G' .

Donc γ' est également simple (l'arête a ajoutée à γ n'était pas déjà parcourue par γ).

Enfin, γ' est de longueur au moins 1, car parcourt l'arête a .

Donc γ' est un cycle de G : G n'est pas acyclique.

Ainsi, si T est un arbre, alors T est connexe par définition et, T étant acyclique, tout sous graphe T' de T obtenu en retirant une arête est non connexe, par contraposition de l'implication précédente. D'où (i) $\Rightarrow$ (ii).

2. c) Soit T un graphe vérifiant (ii). Montrons que T est un arbre.

T est connexe d'après (ii), donc il reste à montrer que T est acyclique.

Supposons par l'absurde que l'on dispose de 'un cycle γ de T .

Notons $k \geq 1$ sa longueur, et $s_0, \dots, s_{k+1}$ les sommets de T tels que $\gamma = (s_0, s_1, \dots, s_{k+1})$.

γ est un cycle donc $s_0 = s_{k+1}$.

Montrons que le graphe T' obtenu à partir de T en retirant l'arête $a = \{s_0, s_1\}$ est connexe.

Tout d'abord, $\gamma: s_0 - s_1 - s_2 - \dots - s_{k+1} = s_0$ est simple, donc

$\gamma': s_1 - s_2 - \dots - s_{k+1} = s_0$ n'emprunte pas l'arête a .

γ' est une chaîne de T' .

Soient s et s' deux sommets de T' .

T' est connexe donc on dispose d'une chaîne c de s vers s' dans T . La chaîne c' obtenue en remplaçant, dans c , tout parcours de l'arête a par le chemin γ' (ou celui obtenu en parcourant γ' dans l'autre sens) ne parcourt plus l'arête a , donc est une chaîne de T' , reliant toujours s à s' .

Donc s et s' sont reliés par une chaîne de T' .

T' est connexe.

Ceci contredit le point (ii). Donc T est acyclique. D'où (ii) $\Rightarrow$ (i).

3. Soit G un graphe admettant un arbre couvrant, et soit T un arbre couvrant de G .

Soient s et s' deux sommets de G .

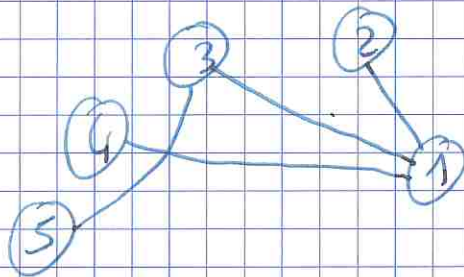
T étant un arbre couvrant de G , s et s' sont des sommets de T . T étant un arbre, il est connexe : on dispose d'une chaîne de T , notée γ , de s vers s' .

T étant un sous-graphe de G , γ est une chaîne du graphe G .

Donc s et s' sont reliés par une chaîne de G :

G est connexe, si G admet un arbre couvrant.

4.a) Un arbre couvrant de ce graphe est :



4.b) Le graphe obtenu à la fin de cet algorithme est connexe, car T est initialement connexe (car G l'est), et les retraites d'arêtes effectuées lors des répétitions de la 2^e étape conservent le caractère connexe de T .

De plus, l'algorithme s'arrête lorsque tout sous-graphe T' obtenu à partir de T en supprimant une arête est non connexe.

D'après l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème 1 (q° 2 b) et 2 c)) :

Le graphe T obtenu par cet algorithme est un arbre.

E2D7

De plus, T a les mêmes sommets que G (et est un sous-graphe de G par construction) car aucune étape ne supprime de sommets à T .

T est un arbre couvrant de G .

4.c) Soit G un graphe non orienté, soit M la matrice d'adjacence de G obtenue après une numérotation quelconque de ses sommets. Notons n l'ordre de G . Alors, G est connexe si et seulement si $I_n + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

```
4.d) def EstConnexe(M):  
    n, p = np.shape(M)  
    S = np.eye(n)  
    for i in range(1, n):  
        S = S + al.matrix_power(M, i)  
    return ((S > 0).all())
```

```
4.e) def TestRetrait(M, i, j):  
    T = np.copy(M)  
    T[i, j], T[j, i] = 0, 0 # T matrice d'adjacence du sous-graphe  
    return (EstConnexe(T))
```

```
4.f) def ListeAnetes(M):  
    L = [] # liste à remplir  
    n, p = np.shape(M)  
    for i in range(n):
```

É2D8

```

for j in range(i+1, n):
    if M[i, j] == 1:
        L.append([i, j])
return(L)

```

4.g) def AnneCouvant(M):

```

n, p = np.shape(M)
T = np.copy(M)
estAnne = False
while not(estAnne):
    retrait = False
    for a in ListeArbres(T):
        i, j = a[0], a[1]
        if TestRetrait(T, i, j):
            retrait = True
            T[i, j], T[j, i] = 0, 0
            break
    if not(retrait):
        estAnne = True
return(T)

```

5.) Soit T un arbre, notons n son ordre.

Par la question 1a), on dispose d'une énumération $v_1, \dots, v_n$ des sommets de T tels que $T[\{v_1, \dots, v_i\}]$ est connexe pour tout $i \in \{1, n\}$, car T est connexe (T est un arbre).

Soit $i \in \{2, n\}$.

Montrons que v_i a un unique voisin parmi $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Supposons par l'absurde que v_i admet au moins deux voisins parmi $v_1, \dots, v_{i-1}$. Soient S et S' deux de ces voisins ($S \neq S'$).

É2D9

s et s' sont des sommets du graphe $T_{i-1} := T[\{v_2, \dots, v_{i-1}\}]$, qui est connue par construction de $v_2, \dots, v_{i-1}$ ($i \geq 2$ donc $i-1 \geq 1$).
Donc, avec 2.a), on dispose d'une chaîne simple γ de T_{i-1} de s vers s' . Notons le sa longueur et $s_1 = s, s_2, \dots, s_k, s_{k+1} = s'$ les sommets de γ .

$$\gamma: s = s_1 - s_2 - \dots - s_{k+1} = s'.$$

Alors, $\gamma' = (v_i, s, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, v_i)$ est une chaîne fermée de T_i (donc de T).

Mais γ' est simple, car γ est simple et γ ne parcourt pas les arêtes ajoutées $\{v_i, s\}$ et $\{s_{k+1}, v_i\}$ pour obtenir γ' , puisque v_i n'est pas un sommet de T_{i-1} (et car γ est une chaîne de T_{i-1}).

Donc γ' (de longueur au moins 2) serait un cycle de T , ce qui est absurde (T est un arbre).

Ceci montre que v_i admet au plus un voisin parmi $v_2, \dots, v_{i-1}$.

Enfin, $T[\{v_2, \dots, v_i\}]$ étant connue et d'ordre $i \geq 2$, v_i n'est pas isolé donc admet un voisin parmi $v_2, \dots, v_{i-1}$.

Donc v_i admet un unique voisin parmi $v_2, \dots, v_{i-1}$, et ce pour tout $i \geq 2$.

Ainsi, la numérotation obtenue en question 1 convient.

6.a)

Montrons par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$: "tout arbre d'ordre n admet $n-1$ arêtes exactement".

Initialisation: $P(1)$ est vrai car, les graphes considérés étant simples, tout graphe d'ordre 1 admet $1-1=0$ arêtes. D'où l'initialisation. (donc tout arbre)

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

Soit T un arbre d'ordre $n+1$. Montrons que T admet n arêtes.

Par la question précédente, on dispose d'une numérotation $v_1, \dots, v_{n+1}$ des sommets de T telle que pour tout $i \geq 2$, v_i a un unique voisin parmi $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Donc v_{n+1} a un unique voisin parmi $v_1, \dots, v_n$.

Posons $T_n = T[\{v_1, \dots, v_n\}]$.

T_n est connexe (en prenant la numérotation de la question 1 par exemple), et T_n est acyclique car T l'est (tout cycle de T_n serait un cycle de T car T_n est un sous-graphe de T).

Donc T_n est un arbre d'ordre n .

Par $P(n)$, T_n possède exactement $n-1$ arêtes.

Or, v_{n+1} ayant un unique voisin parmi $v_1, \dots, v_n$, T admet exactement une arête de plus que T_n .

Donc T admet n arêtes.

D'où $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

On a bien montré par récurrence: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout arbre d'ordre n admet $n-1$ arêtes.

6.b) Soit $G = (S, A)$ un graphe, notons n son ordre.

Supposons (iii): G est connexe et possède $n-1$ arêtes.

Montrons que G est un arbre.

G est connexe donc admet un arbre couvrant

$T = (S, A')$, fixons-en un.

T est un arbre, donc $\text{Card}(A') = n-1$.

Ainsi: $\begin{cases} A' \subset A \\ \text{Card}(A') = \text{Card}(A) \end{cases}$ donc $A = A'$.

Donc $G = T$ et G est un arbre.

On a bien montré (iii) $\Rightarrow$ (i).

7. Soit T un arbre, notons n son ordre et supposons $n \geq 2$.

Soient $d_1, d_2, \dots, d_n$ les degrés des sommets de T dans l'ordre croissant ($d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$).

Montrons $d_1 = d_2 = 1$.

T étant un arbre, il est connexe. Étant d'ordre $n \geq 2$, aucun sommet de T n'est isolé donc:

$$\forall i \in \{1, n\}, d_i \geq 1.$$

Supposons par l'absurde $d_2 \geq 2$. Alors $d_n \geq d_{n-1} \geq \dots \geq d_2 \geq 2$ donc:

$$\text{Alors, } d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n \geq 1 + \sum_{i=2}^n d_i \geq 1 + \sum_{i=2}^n 2 = 2n-1.$$

Or, T possède $n-1$ arêtes par le théorème 1 donc, par le lemme des poignées de mains:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1) = 2n-2.$$

Donc $2n-2 \geq 2n-1$, ce qui est absurde.

Donc $1 \leq d_2 \leq 2$ donc $d_2 = 1$ puis $d_1 = 1$: T a deux sommets de degré 1.

8. Soit N le nombre d'arêtes de K .

(Chaque sommet de K est de degré $n-1$ donc, par le lemme des poignées de mains:

$$2N = \sum_{k=1}^n n-1$$

d'où $2N = n(n-1)$.

K possède donc $N = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

9a) Un élément de $\mathcal{SG}(K)$ est uniquement déterminé par le choix de ses arêtes. Plus précisément:

Soient S et A tels que $K = (S, A)$.

Alors, $\begin{cases} \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{SG}(K) \\ A' \mapsto (S, A') \end{cases}$ est bijective, de

reciproque $\begin{cases} \mathcal{SG}(K) \rightarrow \mathcal{P}(A) \\ (S, A') \mapsto A' \end{cases}$.

Donc $\text{Card}(\mathcal{SG}(K)) = \text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{Card}(A)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, par 8.)

D'où $\text{Card}(\mathcal{SG}(K)) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

(On pourrait argumenter "version de comptage":

Un élément de $\mathcal{SG}(K)$ est un sous graphe de la forme

(S, A') où $A' \subset A$, et réciproquement toute partie A' de A donne un élément (S, A') de $\mathcal{SG}(K)$. Donc il y a autant d'éléments dans $\mathcal{SG}(K)$ que de parties de A .

Or, $\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

9.b) Notons $a_1, \dots, a_N$ les arêtes de K .

Notons, pour tout $k \in \{1, N\}$, A_k l'événement:

"La pièce tombe sur Pile lors du lancer correspondant à l'arête a_k ".

Soit t le nombre d'arêtes de T . Supposons $t \geq 1$.

Quitte à réordonner les arêtes de K , on peut supposer que $a_1, \dots, a_t$ sont les arêtes de T .

$$\text{Alors, } [G=T] = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t \cap \bar{A}_{t+1} \cap \dots \cap \bar{A}_N.$$

Par indépendance mutuelle des lancers:

$$P([G=T]) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_t)P(\bar{A}_{t+1}) \dots P(\bar{A}_N).$$

Or, pour tout $k \in \{1, N\}$, $P(A_k) = P(\bar{A}_k) = \frac{1}{2}$ car la pièce est équilibrée.

$$\text{Donc } P([G=T]) = \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

$$\text{Si } t=0, \quad P([G=T]) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_N) = \prod_{k=1}^N P(\bar{A}_k) = \frac{1}{2^N},$$

par les mêmes arguments.

$$\text{Donc } \underline{P([G=T]) = \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}}.$$

9.c) L'expérience aléatoire ayant pour résultat le G -graphe obtenu est modélisée par un espace probabilisé $(\mathcal{SG}(K), P(\mathcal{SG}(K)), P)$.

D'après 9.b) et a):

$$\forall T \in \mathcal{SG}(K), \quad P(\{T\}) = P([G=T]) = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{SG}(K))}.$$

Donc P est la probabilité uniforme sur $(\mathcal{SG}(K), P(\mathcal{SG}(K)))$.

E2P14

Notons A l'événement " G est un arbre" et B l'événement " G a $n-1$ arêtes".

D'après le théorème 1, $A \subset B$.

Or, un élément de B est entièrement déterminé par le choix de ses $n-1$ arêtes, qui constituent une partie de cardinal $n-1$ de l'ensemble des arêtes de K , de cardinal N .

Donc $\text{Card}(B) = \binom{N}{n-1}$.

Ainsi, $A \subset B$ donc $P(A) \leq P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\mathcal{G}(K))} = \frac{\binom{N}{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

Donc la probabilité que G soit un arbre est inférieure à $\binom{N}{n-1} 2^{-\frac{n(n-1)}{2}}$.

10.a) Une arête e de K reliant un élément de G_k à un élément de D_k est entièrement déterminée par la donnée successive d'un sommet de G_k et d'un sommet de D_k , car K est complet (et $G_k \cap D_k = \emptyset$).

Il y a donc, par principe multiplicatif, $\text{Card}(G_k) \times \text{Card}(D_k) = k(n-k)$ telles arêtes.

b) Notons, pour toute arête a de K , $N(a)$ l'événement: "la pièce tombe sur Pile lors du lancer pour l'arête a ".

Soient $a_1, a_2, \dots, a_{k(n-k)}$ les $k(n-k)$ arêtes reliant un sommet de G_k à un sommet de D_k (d'après 10.a)).

On veut calculer $P\left(\bigcap_{i=1}^{k(n-k)} N(a_i)\right)$.

Par indépendance mutuelle des lancers:

E2P15

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k(n-k)} \overline{N(a_i)}\right) = \prod_{i=1}^{k(n-k)} P(\overline{N(a_i)})$$

Or, pour tout $i \in [1, k(n-k)]$, $P(\overline{N(a_i)}) = 1-p$ car la pièce tombe sur pile avec probabilité p et $P(\overline{N(a_i)}) = 1 - P(N(a_i))$.

$$\text{Donc } P\left(\bigcap_{i=1}^{k(n-k)} \overline{N(a_i)}\right) = \prod_{i=1}^{k(n-k)} (1-p) = (1-p)^{k(n-k)} \quad (\text{le produit est constant}).$$

La probabilité qu'aucun sommet de G_k ne soit relié à un sommet de D_k est bien $(1-p)^{k(n-k)}$.

10.c) cf cours (référence sur R).

10.d) Si A_k est réalisée, alors il existe une partie I de $[1, n]$ tel qu'aucun sommet de I ne soit voisin dans G d'un élément de $[1, n] \setminus I$, et telle que $\text{Card}(I) = k$.

Notons $I_1, \dots, I_{\binom{n}{k}}$ les $\binom{n}{k}$ parties de $[1, n]$ de cardinal k (par définition de $\binom{n}{k}$) et notons, pour toute partie I de $[1, n]$ de cardinal k , $D(I)$ l'événement "aucun sommet de I n'est voisin d'un sommet de $[1, n] \setminus I$ dans G ".

On a donc : $A_k \subset D(I_1) \cup D(I_2) \cup \dots \cup D(I_{\binom{n}{k}})$.

Par croissance de P :

$$P(A_k) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} D(I_i)\right)$$

Par l'inégalité de Boole :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} D(I_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(D(I_i))$$

EP16.

Mais par la question 10.b):

$$\forall i \in \{1, \dots, \binom{n}{k}\}, P(D(I_i)) = (1-p)^{k(n-k)}$$

Donc par linéarité:

$$P(A_k) \leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} (1-p)^{k(n-k)} = \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}$$

Car on reconnaît une somme constante.

11.a) Supposons $\bar{C}$ réalisé: G n'est pas connexe.

Soit $V \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $G[V]$ soit une composante connexe de V .

$V \neq \{1, \dots, n\}$, Car sinon $G[V] = G$ ce qui contredit la connexité de $G[V]$.

Posons $D = \{1, \dots, n\} \setminus V$.

Prouvons: Aucune arête de G ne relie D à V .

Par l'absurde, sinon, on disposerait d'une arête $\{d, v\}$ de G avec $d \in D$ et $v \in V$.

Alors, $G[V \cup \{d\}]$ serait connexe, car tous ses sommets seraient reliés à v par une chaîne.

Enfin, $\begin{cases} D \cup V = \{1, \dots, n\} \\ D \cap V = \emptyset \end{cases}$ donc $\text{Card}(D) + \text{Card}(V) = n$.

Prouvons: $\text{Card}(D) \leq \frac{n}{2}$ ou $\text{Card}(V) \leq \frac{n}{2}$.

Par l'absurde, si c'était faux, on aurait $\text{Card}(D) + \text{Card}(V) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, ce qui contredit l'égalité $\text{Card}(D) + \text{Card}(V) = n$.

Posons $k = \begin{cases} \text{Card}(D) & \text{si } \text{Card}(D) \leq \frac{n}{2} \\ \text{Card}(V) & \text{sinon} \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ k \leq \frac{n}{2} \end{cases}$ donc $\lfloor k \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (croissance de $t \mapsto \lfloor t \rfloor$)
d'où $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($k \in \mathbb{N}$).

E2P17

Finalement, on dispose de $k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ et de parties D et V dont l'une est de cardinal k , l'autre de cardinal $n-k$, telles qu'aucune arête de G ne relie D à V .

Donc A_k est réalisé pour un certain $k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$.

Donc $\bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k$ est réalisé, et ce si $\bar{C}$ l'est.

Donc $\bar{C} \subset \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k$.

11. b) D'après la question précédente, et par naissance de P :

$$P(\bar{C}) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k\right).$$

D'après l'inégalité de Boole:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} \quad (\text{par 10. d}).$$

Or, $0 \leq 1-p \leq e^{-p}$ donc par naissance de $t \mapsto t^{k(n-k)}$ sur $\mathbb{R}_+ (k(n-k) > 0)$:

$$(1-p)^{k(n-k)} \leq e^{-pk(n-k)}, \text{ et ce pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Par somme d'inégalités:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} e^{-pk(n-k)}.$$

Enfin, par transitive:

$$P(\bar{C}) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} e^{-pk(n-k)}.$$

E2P18

12.a) Montrons que, pour ^{tout} n assez grand, il existe $p \in]0, 1[$ tel que $p < \frac{2 \ln(n)}{n}$.

Par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Donc $\frac{2 \ln(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Par définition des limites, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on dispose de $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N_0, |\frac{2 \ln(n)}{n} - 0| < \varepsilon$.

Donc : $\forall n \geq N_0, \frac{2 \ln(n)}{n} < \frac{1}{2}$. ($n \geq 1$ donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$).

Ainsi, on dispose de N_0 tel que si $n \geq N_0$, il est possible d'avoir $\left. \begin{array}{l} p \in]0, 1[\\ p > \frac{2 \ln(n)}{n} \end{array} \right\}$ (tout élément de $[\frac{1}{2}, 1[$ conviendrait).

12.b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1} \quad \text{car } k! \geq 1$$

$$\leq n^k$$

car $\left. \begin{array}{l} 0 \leq n \leq n \\ 0 \leq n-1 \leq n \\ \vdots \\ 0 \leq n-k+1 \leq n \end{array} \right\}$ et par produit d'inégalités à $(k \leq n)$ membres positifs.

Donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k} \leq n^k$.

12.c) Soit $k \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$.

$$\binom{n}{k} \leq n^k \quad \text{donc} \quad \binom{n}{k} e^{-pk(n-k)} \leq n^k e^{-pk(n-k)}$$

Par somme d'inégalités :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} e^{-pk(n-k)} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^k e^{-pk(n-k)}$$

E2P19

Donc d'après 11.b):

$$P(\bar{C}) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^k e^{-pk(n-k)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Or, : } \forall k \in \mathbb{N}, \quad n^k \exp(-pk(n-k)) &= \exp(k \ln(n)) \exp(-pk(n-k)) \\ &= \exp\left(k \ln(n) - \alpha \frac{\ln(n)}{n} k(n-k)\right) \\ &\quad \left(p = \alpha \frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \exp\left(\left(1 - \alpha \cdot \frac{n-k}{n}\right) k \ln(n)\right). \end{aligned}$$

Si maintenant $k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$, alors $k \leq \frac{n}{2}$ donc
 $n-k \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ d'où $\frac{n-k}{n} \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi,} \quad -\alpha \frac{n-k}{n} \leq -\frac{\alpha}{2} \quad (-\alpha < 0)$$

$$\text{donc} \quad \left(1 - \alpha \frac{n-k}{n}\right) \leq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

puis $(k \ln(n)) \geq 0$ (car $k \geq 1$ et $n \geq 2$):

$$\left(1 - \alpha \cdot \frac{n-k}{n}\right) k \ln(n) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) k \ln(n).$$

Donc par croissance de l'exponentielle:

$$\forall k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], \quad \exp\left(\left(1 - \alpha \frac{n-k}{n}\right) k \ln(n)\right) \leq \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) k \ln(n)\right).$$

Enfin, par somme d'inégalités et par transitivité avec (1):

$$P(\bar{C}) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) k \ln(n)\right).$$

12.d)

$$\forall k \geq 1, \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k \ln(n)\right) = n^{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k} = \left(n^{1 - \frac{\alpha}{2}}\right)^k$$

Donc $\sum_{k \geq 1} \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k \ln(n)\right)$ est une série géométrique

de raison $n^{1 - \frac{\alpha}{2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2} - 1}$. Or, $\alpha > 2$ donc $\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$,

$$\text{et } n \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2} - 1} < 1^{\frac{\alpha}{2} - 1} = 1, \text{ car}$$

$t \mapsto t^{\frac{\alpha}{2} - 1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\frac{\alpha}{2} - 1 > 0$).

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \in]-1, 1[.$$

Donc $\sum_{k \geq 1} \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k \ln(n)\right)$ converge en tant que série géométrique de raison appartenant à $] -1, 1[$, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k \ln(n)\right) = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} - 1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} - 1}}}$$

12.c) La série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} - 1}}\right)^k$ est à termes positifs, donc ses sommes partielles sont majorées par la somme :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \exp\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)k \ln(n)\right) \leq \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} - 1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2} - 1}}} = \frac{1}{n^{\gamma} - 1},$$

où l'on a posé $\gamma = \frac{\alpha}{2} - 1 > 0$ (voir 12.d).

D'après 12.c) :

$$P(\overline{C}) \leq \frac{1}{n^{\gamma} - 1}, \text{ où } \gamma = \frac{\alpha}{2} - 1 > 0.$$

E2P2)

12. f)

Par passage au complémentaire :

$$C_n = P(C) = 1 - P(\bar{C}) \geq 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}}, \text{ d'après la question précédente.}$$

De plus, $C_n = P(C) \leq 1$ car P est à valeurs dans $[0, 1]$.

$$\text{Donc } 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}} \leq C_n \leq 1$$

Ceci est valable pour tout n assez grand (conformément à 12.a)), et :

$\gamma > 0$ donc $n^{\gamma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc sans forme indéterminée :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{n^{\gamma-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \\ 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \end{array} \right.$$

D'après le théorème des gendarmes, $C_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

13.a) Les graphes sont simples donc le degré d'un sommet est la somme de sa ligne dans M :

def $\text{Deg}(M, i)$:

return($\text{np.sum}(M[i, :])$)

É2P22

13. b)

def Laplace(M):

n, p = np.shape(M)

D = np.zeros((n, n))

for i in range(n):

 D[i, i] = Deg(M, i)

return (D-M)

14. D est diagonale donc symétrique, et M est symétrique car G est non orienté.

$$\text{Donc } {}^tL = {}^t(D-M) = {}^tD - {}^tM = D - M = L.$$

L est symétrique.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\text{Ker}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $A \cdot D_{n,1} = D_{n,1}$ par propriété de $D_{n,i}$, donc $D_{n,1} \in \text{Ker}(A)$.

(iii) $\forall (X, Y) \in \text{Ker}(A)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$A \cdot (\lambda X + \mu Y) = \lambda \cdot AX + \mu \cdot AY \stackrel{(i)}{=} \lambda \cdot D_{n,1} + \mu \cdot D_{n,1} = D_{n,1} + D_{n,1} = D_{n,1}$$

(i) $X \in \text{Ker}(A)$ et $Y \in \text{Ker}(A)$.

Donc: $\forall (X, Y) \in \text{Ker}(A)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda X + \mu Y \in \text{Ker}(A)$.

D'après la caractérisation en trois points des SEV, (i) (ii) et (iii) montrent que $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

E2P23

$$\begin{cases} 3-1-1-1=0 \\ -1+2+0-1=0 \\ -1+0+1+0=0 \\ -1-1+0+2=0 \end{cases}$$

done $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{4,1}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(L)$.

17. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{4,1}$.

$L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 0_{4,1}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\text{Ker}(L)$.

$\text{Ker}(L)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a par théorème :

$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Ker}(L)$

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(L)$. $LX = 0$ donc :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \\ z-t=0 \\ -z+t=0 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x=y \\ z=t \end{cases}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, pour tout $X \in \text{Ker}(L)$.

Donc $\text{Ker}(L) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. D'après 17.a) :

$\text{Ker}(L) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

E2P24 17.c) $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre, car:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc la famille E est une base de $\text{Vect}(E) = \text{Ker}(L)$.

E étant constitué de 2 vecteurs: $\dim(\text{Ker}(L)) = 2$.

18. Soit $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la famille des coefficients de M .

Soient $d_1, \dots, d_n$ les degrés des sommets de G , dans l'ordre de leur numérotation: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors, } LU = 0_{n,1} \Leftrightarrow (D - M)U = 0_{n,1} \\ \Leftrightarrow DU = MU.$$

Soit $i \in \{1, n\}$.

$DU \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour coefficient en i^{e} ligne le scl.

$0 \times 1 + 0 \times 1 + \dots + d_i \times 1 + 0 \times 1 + \dots + 0 \times 1 = d_i$. Et ce pour tout $i \in \{1, n\}$.

$$\text{Donc } DU = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient en i^{e} ligne de MU est:

$$m_{i,1} \times 1 + m_{i,2} \times 1 + \dots + m_{i,n} \times 1 = \sum_{k=1}^n m_{i,k}.$$

Cette somme a exactement d_i termes valant 1, les autres étant nuls: ce sont les termes $m_{i,k}$ tels que $i \neq k$.

Donc le coefficient en i^{e} ligne de MU est d_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$MU = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = DU.$$

Où $LU = 0_{n,1}$ $U \in \text{Ker}(L)$.

19.

a) Soit v un sommet tel que $f(v) = M$.

G étant connexe, v est non isolé ($n > 2$) donc admet des voisins.

Soient $v_1, \dots, v_{\deg(v)}$ les voisins de v .

Par hypothèse sur f :

$$f(v) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{i=1}^{\deg(v)} f(v_i).$$

$$\text{Donc } (f(v) = M): \sum_{i=1}^{\deg(v)} f(v_i) = \deg(v) M = \sum_{i=1}^{\deg(v)} M.$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^{\deg(v)} M - f(v_i) = 0.$$

De plus, $M - f(v_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \deg(v)\}$.

La somme $\sum_{i=1}^{\deg(v)} M - f(v_i)$ est donc une somme de termes positifs qui est nulle : tous ses termes sont donc nuls.

D'où $\forall i \in \{1, \deg(v)\}, f(v_i) = M$.

On a bien montré que tout voisin v' de v vérifie aussi $f(v') = M$.

b) Montrons que f est constante de valeur $M = \max_{v \in \{1, n\}} f(v)$.

Soit $v_0 \in \{1, n\}$ tel que $f(v_0) = M$.

Soit $v \in S$, montrons $f(v) = M$.

G est connexe, donc on dispose d'une chaîne de v_0 à v :

Soit $\gamma = (s_0, \dots, s_{k+1})$ une telle chaîne. $\gamma: v_0 = s_0 - s_1 - \dots - s_k - s_{k+1} = v$

E2P2.6

On a $f(s_0) = f(v_0) = M$.

Donc par la question précédente, vu que $s_0 \sim_G s_1$,
 $f(s_1) = M$.

De même, $s_1 \sim_G s_2$ donc $f(s_2) = M$.
 $f(s_i) = M$

En répétant ce raisonnement le fois, on obtient $f(s_{k+1}) = M$.

Donc $f(v) = M$.

Rq : Pour formaliser ça, deux options:

- une récurrence finie,
- une preuve par l'absurde, en prenant le plus petit i tel que $f(v_i) \neq M$ si on n'avait pas: $\forall i \in \{1, \dots, k+1\}, f(v_i) = M$.

Ceci étant vrai pour tout sommet v :

$$\forall v \in S, f(v) = M$$

20. On a montré $U \in \text{Ker}(L)$, et $\text{Ker}(L)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Donc $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(L)$.

Montrons $\text{Ker}(L) \subset \text{Vect}(U)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(L)$, montrons $X \in \text{Vect}(U)$.

$$LX = 0_{n,1} \text{ donc } DX = MX, \quad (L = D - M \Rightarrow LX = DX - MX)$$

$$\text{Or, } DX = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix} \text{ et}$$

E2P27

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{n,j} x_j \end{pmatrix}$$

Or, $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $MX = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ où : $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j) \in \mathcal{E}}}^n x_j$.

Ainsi, $DX = MX$ donne :

$$\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, d_i x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j) \in \mathcal{E}}}^n x_j$$

D'où : $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, x_i = \frac{1}{d_i} \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j) \in \mathcal{E}}}^n x_j$ ($d_i \neq 0$ car G connexe)

Ceci montre que $\varphi : \begin{cases} \llbracket 1,n \rrbracket \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto x_i \end{cases}$ est harmonique.

Elle est donc constante par 19), car G est connexe.

Donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot U \in \text{Vect}(U)$.

D'où $\text{Ker}(L) \subset \text{Vect}(U)$.

On a bien montré : $\text{Ker}(L) = \text{Vect}(U)$.

21.a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_c) \in \mathbb{R}^c$ tel que $\sum_{i=1}^c \lambda_i u_i = 0_{n,1}$.

Montrons $\lambda_1 = \dots = \lambda_c = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1,c \rrbracket$, montrons $\lambda_k = 0$.

$V_1, \dots, V_c$ sont non vides et deux à deux disjointes, donc on peut considérer $i_0 \in V_k$ et alors : $\forall j \in \llbracket 1,c \rrbracket, j \neq k \Rightarrow i_0 \notin V_j$.

E2D2P.

Le coefficient en ligne i_0 de $\sum_{i=1}^c \lambda_i U_i$ est alors:

$$\lambda_1 U_{i_0,1}^{(1)} + \lambda_2 U_{i_0,2}^{(2)} + \dots + \lambda_k U_{i_0,k}^{(k)} + \dots + \lambda_c U_{i_0,c}^{(c)}.$$

$$\text{Mais } \left\{ \begin{array}{l} i_0 \in V_k \text{ donc } U_{i_0,1}^{(k)} = 1 \\ \text{pour tout } j \in \llbracket 1, c \rrbracket \text{ tel que } j \neq k, i_0 \notin V_j \text{ donc} \\ U_{i_0,k}^{(j)} = 0. \end{array} \right.$$

Le coefficient en ligne i_0 est donc λ_k .

Puisque $\sum_{i=1}^c \lambda_i U_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien $\lambda_k = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1, c \rrbracket$, la famille

$(U_1, \dots, U_c)$ est bien libre.

21. b) Soit $i \in \llbracket 1, c \rrbracket$. Montrons $U_i \in \ker(L)$.

Il suffit de montrer: $DU_i = MU_i$ (car $LU_i = DU_i - MU_i$).

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient en i_0 -ième ligne de DU_i est $\text{dia } U_{i_0,1}^{(i)} = \begin{cases} \text{dia si } i_0 \in V_i \\ 0 \text{ si } i_0 \notin V_i \end{cases}$.

Celui de MU_i est:

$$\sum_{j=1}^n m_{i_0,j} U_{j,1}^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ i_0 \sim j}}^n U_{j,1}^{(i)}$$

$$\text{car } m_{i_0,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i_0 \sim j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

1^{er} cas: Si $i_0 \notin V_i$. Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$i_0 \sim j \Rightarrow j \notin V_i$. En effet, si $i_0 \sim j$, alors i_0 et j sont sommets de la même composante connexe de G , qui n'est pas $G[V_i]$ car $i_0 \notin V_i$.

E2P29.

Donc dans ce cas; si $i_0 \notin V_i$, alors $u_{j,1}^{(i)} = 0$ ($j \notin V_i$).

Donc dans ce cas: $\sum_{\substack{j=1 \\ i_0 \notin j}}^n u_{j,1}^{(i)} = 0$.

2^e cas: Sinon, $i_0 \in V_i$. Alors, pour tout $j \in \{1, n\}$,
 $i_0 \notin j \Rightarrow j \in V_i$ (car sinon, $G[V_i \cup \{j\}]$ serait
connexe, ce qui contredit la définition des composantes connexes).

Donc dans ce cas, $\sum_{\substack{j=1 \\ i_0 \notin j}}^n u_{j,1}^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ i_0 \notin j}}^n 1 = \frac{1}{n} \deg(i_0)$ dio.

Conclusion: Le coefficient en ligne i_0 de MU_i est
dio si $i_0 \in V_i$, 0 sinon. On retrouve celui de
 DU_i . Ceci étant vrai pour tout $i \in \{1, n\}$:

$$MU_i = DU_i.$$

D'où $U_i \in \text{Ker}(L)$, pour tout $i \in \{1, n\}$.

$\text{Ker}(L)$ étant un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$,
et $U_1 \in \text{Ker}(L), \dots, U_c \in \text{Ker}(L)$, alors on a par théorème:

$$\underline{\text{Vect}(U_1, \dots, U_c) \in \text{Ker}(L)}$$

c) $(U_1, \dots, U_c)$ est libre, donc c'est une base de
 $\text{Vect}(U_1, \dots, U_c)$. Ainsi, $\dim(\text{Vect}(U_1, \dots, U_c)) = c$.

Mail $\text{Vect}(U_1, \dots, U_c) \subset \text{Ker}(L)$. Par théorème,

$$\underline{\dim(\text{Ker}(L)) \geq \dim(\text{Vect}(U_1, \dots, U_c)) = c}.$$

E2P30

21.d) $L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{n,1}$ donne en core :

$$D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ soit :}$$

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}.$$

puin (voir 20) :

$$\forall l \in \{1, n\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n x_j = d_l x_l.$$

$$\text{D'où : } \forall l \in \{s_1, \dots, s_{n_i}\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n x_j = d_l x_l.$$

Soit $l \in V_i$, alors pour tout $j \in \{1, n\}$, $j \neq l$ si et seulement si $j \neq l$, car les arêtes partant de l

ont leur autre extrémité dans V_i car $G[V_i]$ est une composante connexe de G . De plus, pour la même raison, d_l est aussi le degré de x_l en tant que sommet de $G[V_i]$.

1^{er} cas : Si $n_i = 1$, il n'y a rien à démontrer.

2^{ème} cas : Sinon, $n_i > 1$ donc $G[V_i]$ est connexe et a plus de 2 sommets, ceux-ci ne sont pas isolés. Donc $d_l \geq 1$ et :

$$x_l = \frac{1}{d_l} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l \\ j \in V_i}}^n x_j, \text{ pour tout } l \in \{s_1, \dots, s_{n_i}\}.$$

Donc $\phi : \begin{cases} V_i \rightarrow \mathbb{R} \\ l \mapsto x_l \end{cases}$ est harmonique sur le

graphe connexe $G[V_i]$. Elle est constante,

E2P3)

d'où: $\underline{x_{s_1} = x_{s_2} = \dots = x_{s_{n_1}}}$.

Finalement:

Si $n_1 = 1$, il n'y avait rien à montrer.
Sinon, on a bien montré $x_{s_1} = x_{s_2} = \dots = x_{s_{n_1}}$.

21.e) Fixons, pour tout $i \in \llbracket 1, c \rrbracket$, un élément s_i de V_i ($V_i \neq \emptyset$).

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(L)$.

Montrons $X = x_{s_1} u_1 + x_{s_2} u_2 + \dots + x_{s_c} u_c$.

Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

$\llbracket 1, n \rrbracket = \bigcup_{j=1}^c V_j$ donc on dispose d'un unique $j \in \llbracket 1, c \rrbracket$

tel que $i \in V_j$.

Par la question précédente, $x_i = x_{s_j}$.

De plus, le coefficient en i -ième ligne de u_k est 1 si $i \in V_k$ et 0 sinon, pour tout $k \in \llbracket 1, c \rrbracket$.

Donc seul u_j a un coefficient non nul en i -ième ligne.

Donc le coefficient en i -ième ligne de $x_{s_1} u_1 + \dots + x_{s_c} u_c$ est :

$$x_{s_1} \times 0 + \dots + x_{s_j} \times 1 + x_{s_{j+1}} \times 0 + \dots + x_{s_c} \times 0 = x_{s_j}$$

Donc X et $\sum_{k=1}^c x_{s_k} u_k$ ont mêmes coefficients en i -ième ligne. Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$X = \sum_{k=1}^c x_{s_k} u_k$$

Donc $X \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_c)$. D'où $\underline{\text{Ker}(L) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_c)}$
(avec 21.b)) puis $\underline{\dim(\text{Ker}(L)) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_c)) = c}$.