Chapitre 19 : Probabilités

ECG1 A, Lycée Hoche

Dans le chapitre précédent de probabilités, nous nous sommes intéressés aux probabilités finies, c'est-à-dire aux expériences aléatoires avec un nombre fini d'issues.

Exemple 1.
- On effectue $n \in \mathbb{N}$ lancers successifs d'une pièce, et on note la face obtenue à chaque étape. Il y a en tout 2^n issues possibles pour la suite de pile/face obtenue.
- On lance 4 dés classiques à 6 faces et on note la somme des faces obtenues. Il y a 21 résultats possibles (de 4 à 24).
- On tire 10 boules simultanément dans une urne contenant 9 boules blanches et 12 boules noires, et on note le nombre de boules blanches obtenues. Il y a 10 résultats possibles, de 0 à 9.

Pour modéliser ces problème, nous considérons un ensemble fini appelé l'univers permettant de modéliser ces résultats.

Dans ce chapitre, on généralise l'approche utilisée pour des expériences aléatoires avec un nombre potentiellement infini d'issues. Quelques exemples typiques :

Exemple 2.
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile, et on note le nombre de lancers effectués. L'ensemble des issues (l'univers) est infini, on peut ici le modéliser par $\mathbb{N}^*$. Remarque : en pratique, on utilise plutôt l'univers de l'exemple suivant.
- On lance une pièce indéfiniment, et on note la suite de résultats obtenus. Une issue est donc une suite de piles et de faces. Notant 1 pour pile et 0 pour face, l'ensemble des issues est modélisé par l'univers $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. En effet, une issue est alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \in \{0,1\}$ est le résultat du n-ième lancer.
- On lance indéfiniment un dé à 6 faces et on note les résultat obtenu. L'ensemble infini $[\![1,6]\!]^{\mathbb{N}^*}$ est un univers convenable : il modélise l'ensemble des résultats possibles.
- On se présente à la station d'un bus passant toutes les 10 minutes, et on note le temps d'attente avant le passage du bus. C'est un nombre réel considéré aléatoire entre 0 et 10 minutes. Un univers serait ici $[0,10]$ qui est un ensemble infini.

Remarque. (Attention) Si l'univers Ω est infini, **la notion d'équiprobabilité n'a aucun sens**.

Dans le cas d'un univers infini, on aura spontanément besoin de considérer des familles infinies d'événements. Par exemple, si on lance une pièce indéfiniment à pile ou face et qu'on s'intéresse au numéro du lancer donnant le premier pile, on considérera la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : " le premier pile tombe au n-ième lancer".

Un point important de ce chapitre : nos théorèmes nous permettent de bien manipuler ces familles infinies que quand ils sont en nombre ***au plus dénombrable.***

I. Opérations ensemblistes et dénombrabilité

1. Dénombrabilité

Morale : Il y a plusieurs infinis essentiellement différents. Le plus petit infini est l'infini dénombrable.

Définition 3. (i) On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une application bijective $f\ :\ \mathbb{N} \to\ E$.

(ii) On dit qu'un ensemble E est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Remarque. Autrement dit, si E est un ensemble dénombrable, et si $f : \mathbb{N} \to E$ est bijective, alors les éléments de E sont exactement (sans répétition) $f(0)$, $f(1), \dots, f(n), \dots$. Autrement dit, les ensembles dénombrables sont ceux dont on peut énumérer les éléments.

Exemple 4. (i) Exemples fondamentaux : $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{N}_{\geq n_0}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

(ii) On peut montrer que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

(iii) $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

(iv) On peut montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Plus généralement, les intervalles non réduits à un point (comme $[0, 1[$) ne sont pas dénombrables.

(v) On peut montrer que l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, donc n'est pas dénombrable.

(vi) On peut montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ donc n'est pas dénombrable.

Remarque. Vous devez connaitre les exemples ci-dessus. Par contre, en pratique, vous n'aurez pas à utiliser souvent cette définition. Vous devez la connaitre car on manipulera systématiquement des familles infinies au plus dénombrables d'événements.

2. Unions et intersections dénombrables

Rappel : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble Ω. On peut considérer la réunion et l'intersection des éléments de cette famille :

$$\bigcup_{i\in I} A_i =$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i =$$

On manipulera souvent ces réunions et intersections d'un nombre éventuellement infini de parties, mais dans le cadre suivant.

Définition 5. Soit Ω un ensemble. Soit I un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω indexée par I.

(i) On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est (resp. au plus) dénombrable si l'ensemble I est (resp. au plus) dénombrable.

(ii) Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est (resp. au plus) dénombrable, on dit que la réunion $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est une réunion (resp. au plus) dénombrable, et que l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ est une intersection (resp. au plus) dénombrable.

Exemple 6. (fondamental) Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment une pièce et à noter la suite des résultats obtenus.

L'ensemble des issues est modélisé par l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ en notant 1 pour pile et 0 pour face. Un élément de Ω est donc une suite réelle $(u_k)_{k\geq 0}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k \in \{0,1\}.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement "le n-ième lancer tombe sur pile". Autrement dit:

$$A_n = \{(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \Omega, u_n = 1\}.$$

Alors, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille infinie dénombrable de parties de Ω, car $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Ainsi,

- l'intersection suivante est une intersection dénombrable :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n =$$

  Cet événement est décrit par :

- L'union suivante est une réunion dénombrable dénombrable :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n =$$

  Cet événement est décrit par :

Exemple 7. Considérons, pour le temps d'attente d'un bus en minutes, l'univers $\Omega = [0,10]$. Si $x \in \Omega$, on peut considérer l'événement $\{x\}$ donné par "le bus arrive au bout d'exactement x minutes ". Dans ce cas, la famille d'événements $(\{x\})_{x\in[0,10]}$ n'est pas dénombrable car $[0,10]$ n'est pas dénombrable. La majorité de nos théorèmes ne s'appliqueront donc pas pour cette famille d'événements, et on ne pourra pas vraiment utiliser l'égalité :

$$\bigcup_{x\in[0,10]} \{x\} = [0,10].$$

Remarque. (Notation) Soit n_0 un entier et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq n_0}}$ une famille de partie d'un ensemble Ω. Cette famille est dénombrable car indexée par l'ensemble des entiers supérieurs à n_0, et on notera alors :

$$\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\geq n_0}} A_n$$

$$\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_{\geq n_0}} A_n$$

Remarque. En pratique, vous ne manipulerez pas (trop) d'union et d'intersections dénombrables qui ne sont pas indexée par des entiers, donc c'est cette notation que vous manipulerez souvent.

Exemple 8. (i) $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty}\{k\} =$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}[-k,k] =$

(iii) $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathbb{N}_{\geq k} =$

(iv) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, 1 + \frac{1}{k}[=$

Attention

Dans la suite de ce cours, les énoncés seront souvent donnés pour des familles dénombrables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexées par $\mathbb{N}$, mais seront utilisables pour toute famille dénombrable indexée par un ensemble type $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ (en remplaçant 0 par n_0 aux bons endroits).

3. Lois de De Morgan et distributivité

On utilisera souvent les résultats suivants (qui sont en fait vrais pour n'importe quelle famille de parties, la condition de dénombrabilité est inutile).

Proposition 9. (Lois de De Morgan) *Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω. Alors :*

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$$

Démonstration. À noter. □

Proposition 10. (Distributivité) *Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties de Ω. Soit B une partie de Ω. Alors :*

$$\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (A_n \cup B)$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 11. Considérons l'expérience aléatoire consistant à jouer indéfiniment à pile ou face. Un univers convenable est $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (où pile est noté 1). Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_n : " les n premiers lancers tombent sur pile".

(i) Décrire ensemblistement B_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Décrire l'événement $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$ et son événement contraire.

(iii) Décrire l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$ et son événement contraire.

II. Espaces probabilisés

1. Tribu, espace probabilisable

On va généraliser les notions de probabilités finies aux univers infinis. D'un côté, on veut pouvoir manipuler des familles infinies d'événements. De l'autre côté, on veut pouvoir calculer des probabilités avec ces familles infinies. Pour des raisons subtiles qui dépassent le cadre de ce cours, cela à un coût :

- Les familles d'événements ne sont "manipulables" que quand elles sont dénombrables,
- Généralement, on ne peut pas prendre n'importe quelle partie de l'univers comme événement raisonnable.

Pour cette raison, quand on modélise une expérience aléatoire, on doit donner l'ensemble des événements. Pour que ça se passe bien, cet ensemble d'événement doit vérifier certaines propriétés.

Définition 12. Soit Ω un ensemble. On appelle ***tribu*** sur Ω la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) vérifiant les trois points suivants:

(*i*) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(*ii*) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire :

$$\forall P \in \mathcal{A}, \overline{P} \in \mathcal{A}.$$

(*iii*) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Ces conséquences immédiates sont à connaitre comme une définition:

Proposition 13. *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω. Alors,*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et par intersection finie : Si $A_1, \dots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Démonstration. A noter. □

Exemple 14. Soit Ω un ensemble.

(*i*) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu, pour tout ensemble Ω (appelée la tribu grossière).

(*ii*) Soit Ω un ensemble. Alors, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω (appelée la tribu discrète). Si Ω est au plus dénombrable (fini par exemple), on prends généralement cette tribu.

(*iii*) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}$ est une tribu sur $\Omega = \{1,2,3,4\}$.

(*iv*) (HP) Si $\Omega = \mathbb{R}$, on considère généralement une tribu, appelée la tribu borélienne, formée de toutes les réunions dénombrables d'intervalles. C'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles.

Remarque. La construction de tribus est hors du cadre de ce cours. Dans ce cours, vous devrez comprendre que :

- Lorsqu'on modélise une expérience aléatoire non finie, on doit donner un univers Ω modélisant les issues, et l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements associé à cet univers.

- Un événement est une partie de Ω. L'ensemble $\mathcal{A}$ des événements est donc un ensemble de parties de Ω : dire "$B \in \mathcal{A}$" revient à dire "B est un événement".
- L'ensemble $\mathcal{A}$ des événements vérifie les définitions et propriétés des tribus ci-dessus.

Définition 15. On appelle ***espace probabilisable*** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que :
(*i*) Ω est un ensemble, appelé ***l'univers*** de $(\Omega, \mathcal{A})$,
(*ii*) $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, appelée l'ensemble des événements de $(\Omega, \mathcal{A})$.
On appelle ***événement*** (de $(\Omega, \mathcal{A})$) tout élément de $\mathcal{A}$.

Exemple 16. (*i*) En probabilités finies, on considère un univers Ω fini, et l'espace probabilisable associé est systématiquement $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(*ii*) Si Ω est un univers modélisant une expérience aléatoire infinie, on admet l'existence d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω modélisant l'ensemble des événements. On dit que l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ modélise cette expérience aléatoire.

Toutes les notions du chapitre de probabilités finies se généralisent :

Définition 17. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
(*i*) Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
(*ii*) On appelle famille d'événements deux à deux incompatibles toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements telle que
$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$
(*iii*) Si A est un événement, l'événement $\bar{A}$ est appelé l'événement contraire de A.

Remarque. Les notions d'événements impossibles et certains se transposent telles quelles. Mais nous parlerons plutôt d'événements négligeables et presque sûrs (voir plus bas).

2. Espaces probabilisés

Un espace probabilisé est la donnée supplémentaire d'une probabilité sur un espace probabilisable.

Définition 18. (*i*) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application
$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$$
telle que :
(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
(b) *(σ-additivité)* Pour toute famille d'événements deux à deux incompatibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
(*ii*) On appelle ***espace probabilisé*** la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
(*iii*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont toujours appelés les événements (de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), et si A est un événement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé ***la probabilité de l'événement*** A.

Voici les premières propriétés des probabilités.

Proposition 19. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

(i) L'ensemble vide $\emptyset$ est un événement, et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Pour toute famille finie d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, on a :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

(iii) Pour tout événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. (probabilité de l'événement contraire)

(iv) Pour tous événements A et B, $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. (croissance de $\mathbb{P}$ pour l'inclusion)

(v) Pour tous événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vi) Pour tous événements A, B et C :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Démonstration. (i) et (ii) à noter, reste : voir le chapitre de probabilités finies (les preuves sont strictement les mêmes, en vertu du point (ii)). ☐

Mentionnons enfin :

Proposition 20. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

(i) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements. Si la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(ii) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements (où $n \in \mathbb{N}^*$). Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration. (i) : Admise (un peu formelle). (ii) : Voir le cours de probabilités finies (inégalité de Boole, par récurrence), dont la démonstration reste valide vu les résultats de la proposition précédente. ☐

Remarque. Comme pour les probabilités finies, la version "famille finie" de cet énoncé est toujours vraie. C'est l'inégalité de Boole, et c'est une question de cours très classique aux écrits.

3. Événements presque sûrs et négligeables. Indépendance mutuelle.

Les notions d'événements impossibles ou certains des probabilités finies sont délaissées, au profit de celles-ci.

Définition 21. Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(i) On dit que A est un événement presque sûr (ou quasi-certain) si $\mathbb{P}(A) = 1$.

(ii) On dit que A est un événement négligeable (ou quasi-impossible) si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Pour l'indépendance, on généralise la notion aux famille au plus dénombrables.

Définition 22. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrables d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants si pour toute ensemble fini $I \subset \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque. On généralise ainsi la notion d'indépendance mutuelle d'une famille d'événements vue dans le cas fini. On remarquera la subtilité.

Proposition 23. *L'indépendance mutuelle est stable par passage au complémentaire : si $A_1, \ldots, A_n$ sont $n \in \mathbb{N}$ événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé, et si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, alors $B_1, \ldots, B_n$ sont n événements mutuellement indépendants.*

Remarque. La proposition similaire pour une famille infinie d'événements est toujours vraie, et cette proposition se démontre comme dans le cas fini.

4. Un exemple

La construction d'espaces probabilisés est hors programme. Comment manipuler ces notions en ECG? Voyons un exemple typique.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer une infinité de fois une pièce équilibrée à pile ou face. Les lancers sont indépendants les uns des autres.

Question possible : modéliser le problème.

Vous êtes souvent capable de donner l'univers, mais pas systématiquement. Ici, c'est le cas.

En notant 1 pour pile de 0 pour face, une issue est la donnée d'une suite u à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc on considère l'univers $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.

Pour l'ensemble des événements et la probabilité, vous devez admettre leur existence, et traduire l'énoncé en conditions sur ces données.

On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement "le n-ième lancer tombe sur pile". On a alors :

(*i*) A_n est un événement pour tout entier n : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \in \mathcal{A}$.

(*ii*) La pièce est équilibrée : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

(*iii*) Les lancers sont (mutuellement) indépendants : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

On peut maintenant utiliser ces données, et les résultats du cours, pour traiter les questions.

Question : Quelle est la probabilité de l'événement B_n : "obtenir pile pour la première fois au n-ième lancer" (où $n \in \mathbb{N}^*$) ?

On a $B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \in \mathcal{A}$ donc par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire et par intersection finie, on a bien $B_n \in \mathcal{A}$: B_n est bien un événement.

De plus, par indépendance mutuelle des lancers :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \ldots \mathbb{P}(\overline{A_{n-1}})\mathbb{P}(A_n).$$

Or, par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \dfrac{1}{2}$. On a donc :

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Question : quelle est la probabilité d'obtenir pile pour la première fois lors d'un lancer de numéro pair?

On cherche donc la probabilité de

$$B = B_2 \cup B_4 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{2k}$$

qui est bien un événement comme réunion dénombrable d'événements.

Les événements $(B_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc par σ-additivité, $\sum_k \mathbb{P}(B_{2k})$ converge et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Question : Quelle est la probabilité de n'obtenir que des piles lors des $n \in \mathbb{N}^*$ premiers lancers?

On procède de même. On cherche la probabilité de l'événement $F_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ (qui est bien un événement comme intersection finie d'événements). Par indépendance mutuelle :

$$\mathbb{P}(F_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2^n}.$$

Question : Quelle est la probabilité de ne faire que des piles ?

Le problème est de donner la probabilité de $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$. On ne peux pas utiliser directement l'indépendance et la σ-additivité. Quelques outils pour gérer les réunions et intersections dénombrables seront vues dans la partie suivante. Dans certains cas, il faudra refaire le raisonnement (suivant) à chaque fois.

On cherche la probabilité de l'événement $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \subset F_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ (pourquoi ?) donc par positivité et croissance de $\mathbb{P}$ pour l'inclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Or, $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement,

$$\mathbb{P}(F) = 0.$$

F est un événement négligeable.

III. Limite monotone et probabilités conditionnelles

1. Méthodes propres aux unions et intersections dénombrables

Les résultats de cette partie ne sont pas clairement au programme, mais sont des démarches très communes.

a) Méthodes pour la négligeabilité et la quasi-certitude

Nous voyons ici deux méthodes :

- Une méthode pour montrer que certaines réunions dénombrables d'événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sont presque sûres, et
- une méthode pour montrer que certaines intersections dénombrables d'événements $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ sont négligeables.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Méthode 1 : Pour montrer que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est un événement presque sûr, on peut :

(i) Démontrer, au choix, que $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ou que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puis

(ii) utiliser la croissance de $\mathbb{P}$ pour déduire, par encadrement, que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

Pour le second point on utilise que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ *(ces inclusions sont toujours vraies) pour déduire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq 1$$

ce qui permet de conclure par encadrement, quelque soit le point choisi en (i).

Exemple 24. On considère une suite infinie de lancers d'un dé à 6 faces (classiques), équilibré. On considère bien sûr les lancers indépendants. Montrer que l'événement "obtenir au moins une face 1" est presque-sûr.

Méthode 2 : Pour montrer que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est un événement négligeable, on peut :

(i) Démontrer, au choix, que $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, puis

(ii) utiliser la croissance de $\mathbb{P}$ pour déduire, par encadrement, que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 0$.

Pour le second point on utilise que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset \bigcap_{k=0}^{n} A_k \supset \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$ *(ces inclusions sont toujours vraies) pour déduire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \geq 0$$

ce qui permet de conclure par encadrement, quelque soit le point choisi en (i).

Exemple 25. Voir la "probabilité de ne faire que des piles" pour l'exemple du II.4.

b) Propriété de la limite monotone (HP, à savoir refaire)

Voici un résultat très utile pour calculer la probabilité d'une réunion ou d'une intersection dénombrable dans un cas plus général.

On commence par un résultat proche des théorèmes dits "de limite monotone". Il concerne les suites croissantes ou décroissantes d'événement.

Définition 26. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que :

(i) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements si $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

Remarque. Plus précisément, on parle de "croissance (ou de décroissance) de $(A_n)_n$ pour l'inclusion".

Proposition 27. (Propriété de la limite monotone) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration. Point (i) en annexe, point (ii) en exercice à partir de (i). □

En pratique, on utilise plutôt le corollaire suivant :

Proposition 28. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors,*

(i) $(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$

(ii) $(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Démonstration. (i) : On se ramène à la proposition précédente. Pour cela, on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ de sorte que (exercice, par double inclusion) :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

La famille $(B_n)_n$ est une suite croissante d'événement, ce qui nous permet de conclure par limite monotone. L'énoncé (ii) se démontre de la même façon (en considérant, à la place, les intersections, ou par passage au complémentaire à l'aide des lois de De Morgan). □

2. Probabilités conditionnelles et formule des probabilités composées

On procède comme pour le cas fini.

Définition 29. (Et proposition.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A \in \mathcal{A}$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

(i) L'application

$$\mathbb{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée ***probabilité conditionnelle sachant*** A.

(ii) Soit $B \in \mathcal{A}$. On dit que le réel $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de B sachant A.

Démonstration. En annexe. □

Remarque. $\mathbb{P}_A(B)$ est donc toujours la probabilité que l'événement B se réalise sachant que A est réalisé. Il ne faut **surtout pas** la confondre avec $\mathbb{P}(A \cap B)$, la probabilité que A et B soient réalisés.

Remarque. Dans cette proposition, on démontre que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Autrement dit, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est aussi un espace probabilisé. L'application $\mathbb{P}_A$ hérite donc de toutes les propriétés déjà démontrées pour les probabilités (propositions 19 et 20 par exemple).

Les conséquences déjà observées pour le cas fini restent vraies, et les démonstrations sont analogues.

Proposition 30. (Probabilités composées) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

(i) Soient A et B deux événements. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B).$$

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n$. Si $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Identique à celle écrite dans le chapitre sur les probabilités finies. □

Proposition 31. (Formule de Bayes) *Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Supposons $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration. Analogue. □

3. Système complet d'événements et formule des probabilités totales

Ici, on généralise la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable. Les énoncés connus pour le cas fini s'adaptent sans peine.

Définition 32. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ***un système complet d'événement*** si :

(*i*) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$, et

(*ii*) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Remarque. Cas fini : Une famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ d'événements deux à deux disjoints et telle que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ est aussi appelée ***un système complet d'événements***.

Remarque. Si A est un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $(A, \bar{A})$ forme toujours un système complet d'événement.

Remarque. Attention, la vérification du point (*ii*) n'est **pas du tout** équivalente à la simple vérification que l'intersection de tous les A_n est vide. Il faut prendre i et j deux entiers distincts quelconques, et démontrer $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple 33. On étudie l'évolution d'une file d'attente devant un commerce sur une journée. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n : " Il y a exactement n personnes faisant la queue à midi' et B_n : "il y a au moins n personnes faisant la queue à midi".

Que dire des familles d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

La formule des probabilités totales est toujours vraie, mais avec une série pour un SCE dénombrable.

Proposition 34. (Formule des probabilités totales.) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

(i) Alors, pour tout événement B, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(B\cap A_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_n).$$

(ii) Si de plus $\forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n)\neq 0$, alors $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ converge et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Cas fini : La proposition analogue avec un système complet d'événement fini (et des sommes finies) est toujours vraie (voir probabilités finies).

Remarque. En particulier, si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A)\neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A})\neq 0$, alors pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B).$$

On applique ici la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A, \bar{A})$.

Exemple 35. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n (où $n\in\mathbb{N}^*$). L'urne numéro k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard de manière équiprobable, et on tire simultanément deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules blanches?

Cet exemple est en fait un exemple de probabilités finies...

Exemple 36. On lance indéfiniment une pièce à pile ou face. On note, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, A_n :" on tombe sur pile pour la première fois au n-ième lancer". $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas un système complet d'événements (il manque le cas où on ne tombe jamais sur pile).

Notons de plus A_0 : " on ne tombe jamais sur pile".

Alors, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Pour travailler avec ce système complet d'événement, on montre que $\mathbb{P}(A_0)=0$ (exemple précédent).

La formule des probabilités totales devient, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_0\cap B) + \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n\cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n\cap B)$$

car : $\begin{cases} A_0\cap B\subset A_0 \\ \mathbb{P}(A_0)=0 \end{cases} \implies 0\leq \mathbb{P}(A_0\cap B)\leq \mathbb{P}(A_0)=0 \implies \mathbb{P}(A_0\cap B)=0.$

Autrement dit, en ajoutant l'événement négligeable A_0, on se ramène à un SCE, et cet événement disparait dès l'utilisation de la formule des probabilités totales.

Remarque. On dit que la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système ***quasi***-complet d'événements si :

(i) Les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles,

(ii) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1$.

Cette notion a disparu des programmes mais est en fait un incontournable (car on travaille le plus souvent avec un système quasi-complet d'événements). Il faudra se laisser guider par l'énoncé de l'exercice pour comprendre selon quelle logique rédiger. En pratique on a deux choix face à un système quasi-complet d'événement :

- On peut rajouter à notre famille l'événement complémentaire à $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, et refaire le petit raisonnement de l'exemple 14, ou
- on peut écrire que "$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système (quasi)-complet d'événement" ce qui permettra d'utiliser la formule des probabilités totales.

Exercice 37. On considère une suite infinie de lancers mutuellement indépendants d'un dé à 6 faces équilibré. Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n : "le résultat du n-ième lancer est 1" et B_n : " le premier 1 apparait au n-ième lancer.

(i) Exprimer B_n en fonction des événements A_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$. En déduire $\mathbb{P}(B_n)$.

(ii) Justifier l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$ et calculer cette somme.

(iii) Calculer la probabilité de l'événement E : "la première fois qu'un 1 tombe, il est suivi d'un autre 1".

4. Un peu plus de probabilités conditionnelles

Tout d'abord, on peut maintenant enrichir la formule de Bayes.

Proposition 38. (Formule de Bayes) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \neq 0$, alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ converge et :*

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)}.$$

Démonstration. À retrouver. □

Remarque. En particulier, si A est un événement de probabilité non nulle et telle que $\mathbb{P}(A) \neq 1$, alors cette proposition appliquée au SCE $(A, \bar{A})$ donne que pour tout événement B de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}.$$

Définition 39. Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont dits indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarque. La notion d'indépendance deux à deux d'une famille d'événements est définie de la même façon qu'en probabilités finies, mais est assez peu utilisée. Par contre, il ne faut pas confondre l'indépendance deux à deux avec l'indépendance mutuelle définie précédemment.

Proposition 40. *Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A).$$

Démonstration. À retrouver. □

IV. Annexe

Démonstration de la proposition 27

Proposition 27 : **(Propriété de la limite monotone)** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

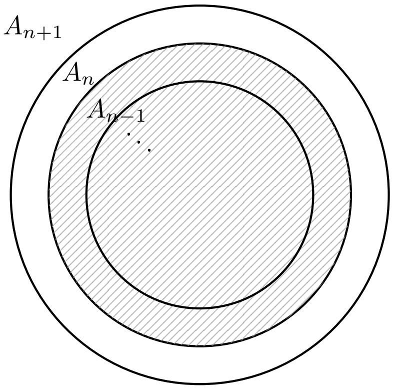
(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

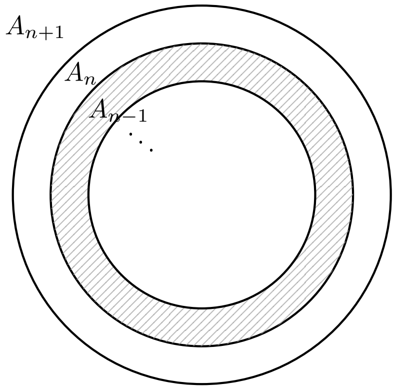
(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Montrons le premier point (i). Supposons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements.



A_n *est hachuré.*



B_n *est hachuré.*

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}} = A_n \setminus A_{n-1}$.

- Montrons que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles.

  Soient i et j deux entiers distincts. On veut donc montrer $B_i \cap B_j = \emptyset$.

  Dans cet énoncé voulu, i et j jouent le même rôle donc on peut supposer $i \leq j$ quitte à échanger i et j. Puisque $i \neq j$, on a donc $i < j$.

  Alors, $B_i = \begin{cases} A_i \text{ si } i = 0 \\ A_i \setminus A_{i-1} \text{ sinon} \end{cases}$ donc dans tous les cas, $B_i \subset A_i$.

  De plus, $i < j$ donc $i \leq j-1$ (car i et j sont entiers). Donc par croissance de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour l'inclusion, $A_i \subset A_{j-1}$ (car $A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots \subset A_{j-1}$).

  Donc $B_i \subset A_i \subset A_{j-1}$ d'où $B_i \subset A_{j-1}$.

  Mais $j > i \geq 0$ donc $j \geq 1$ donc $B_j = A_j \cap \overline{A_{j-1}} \subset \overline{A_{j-1}}$.

On a donc montré :

$$\begin{cases} B_i \subset A_{j-1} \\ B_j \subset \overline{A_{j-1}} \end{cases} .$$

Donc $B_i \cap B_j \subset A_{j-1} \cap \overline{A_{j-1}} = \emptyset$.

Donc $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles.

- Montrons que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.

  On procède par double inclusion.

  On a déjà montré que $B_n \subset A_n$ pour tout entier naturel n. On a de plus $A_n \subset \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ par propriété de la réunion.

  Par transitivité, $B_n \subset \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ pour tout entier naturel n.

  Donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$, par propriété de la réunion.

  D'où la première inclusion.

  Montrons maintenant la seconde inclusion :

  $$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

  Soit $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, montrons $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ donc il existe un entier n tel que $x \in A_n$.

  Notons n_0 le plus petit entier naturel n tel que $x \in A_n$.

  Premier cas : si $n_0 = 0$, alors $x \in A_0 = B_0$. Donc $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  Second cas : Sinon, $n_0 \geq 1$ et par minimalité de n_0 : $x \in A_{n_0}$ et $x \notin A_{n_0-1}$.

  Donc $x \in A_{n_0} \cap \overline{A_{n_0-1}} = B_{n_0}$.

  Donc $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  Dans tous les cas, $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

  Ceci étant vrai pour tout $x \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a bien montré la seconde inclusion.

- Un preuve similaire montre que, pour tout entier n, $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

- Concluons.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k) &\overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)\\ &\overset{(3)}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\\ &\overset{(4)}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{n} B_k)\\ &\overset{(5)}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

(1) : d'après l'égalité démontrée $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

(2) et (4) : Car $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, par σ-additivité pour (1) (justifiant la convergence) et par propriété de $\mathbb{P}$ pour (4).

(3) : par définition de la somme d'une série.

(5) : car $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

D'où le premier point (i).

Pour le point (ii) : on peut procéder par passage au complémentaire et appliquer (i), car si (A_n) est décroissante pour l'inclusion, alors $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion (bon exercice assez rapide).

Démonstration de la proposition 29

Proposition et définition 29 : *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A \in \mathcal{A}$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.*

(i) L'application

$$\mathbb{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée ***probabilité conditionnelle sachant*** *A.*

(ii) Soit $B \in \mathcal{A}$. On dit que le réel $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de B sachant A.

Reprenons les notations et hypothèses de l'énoncé.

- Montrons d'abord que l'application $\mathbb{P}_A$ est bien définie.

  Soit $B \in \mathcal{A}$. Alors, A et B étant des événements (car $A \in \mathcal{A}$), $A \cap B$ est un événement ($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie). Donc $\mathbb{P}(A\cap B)$ est bien défini. De plus, $\mathbb{P}(A) \neq 0$ donc le quotient $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est bien défini.

  Enfin, $A \cap B \subset A$ donc par croissance de $\mathbb{P}$ pour l'inclusion, $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(A)$. $\mathbb{P}(A)$ étant positif et non nul, $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq 1$ et ce quotient est positif comme quotient de réels positifs.

  Finalement, $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est un réel bien défini et élément de $[0,1]$, et ce pour tout $B \in \mathcal{A}$.

  Donc $\mathbb{P}_A$ est une application bien définie.

- Montrons que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

  On doit donc montrer que $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$ et que pour toute famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}_A(B_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n).$$

(i) $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ car $A\cap\Omega = A$ car $A \subset \Omega$. D'où le premier point.

(ii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.

Montrons que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}_A(B_n)$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_A(B_n) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(C_n)}{\mathbb{P}(A)}$ où l'on a posé $C_n = A \cap B_n$.

Pour tous entiers naturels i et j distincts, $C_i \cap C_j = (A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) = A\cap B_i\cap B_j = \emptyset$ car $B_i \cap B_j = \emptyset$ car B_i et B_j sont incompatibles par hypothèse sur $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(i \neq j)$.

Donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles. $\mathbb{P}$ étant une probabilité, $\sum\limits_{n} \mathbb{P}(C_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\mathbb{P}(C_n)}{\mathbb{P}(A)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(C_n)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} C_n)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}_A(B_n)$ converge et a pour somme :

$$\frac{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(A\cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(A\cap(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n).$$

D'où ce second point.

Finalement, $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.