Programme de colle n^o 26 : Intégrales de fonctions continues sur un segment. Probabilités (début).

*Semaine du lundi **12 mai**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Intégrales

26.1 Début du chapitre : voir programme précédent.

26.2 Propriétés de positivité et de positivité stricte de l'intégrale. Intégration des inégalités. Inégalité triangulaire pour les intégrales. Exemples de suites définies à l'aide d'une intégrale.

26.3 Intégration par partie. Le "coup du 1".

26.4 Changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, rédaction.

Les changements de variables non affines à effectuer seront donnés par le sujet.

26.5 Exemples d'intégrales "fonctions de leur borne", méthode pour appréhender ces objets.

26.6 Une comparaison série-intégrale : démonstration du cas convergent du critère relatif aux séries de Riemann.

Espaces probabilisés (début).

26.7 Problématiques liées aux univers infinis (introduction) : familles infinies d'événements, dénombrabilité et ensemble des événements.

26.8 Notion d'ensemble dénombrable, au plus dénombrables. Exemples classiques d'ensembles dénombrables et non dénombrables. Unions et intersections dénombrables, rappel des lois de De Morgan et des distributivités. Illustration sur l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment une pièce à Pile ou Face.

Pas d'exercice théorique sur la notion de dénombrabilité.

Quelques questions de cours

1. Énoncer et démontrer les propriétés de positivité et de positivité stricte de l'intégrale.
2. Énoncer et démontrer la proposition concernant l'intégration des inégalités. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_n$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.
3. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les intégrales.
4. Énoncer et démontrer la proposition relative à l'intégration par partie. En déduire une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (exemple 34).
5. Énoncer et démontrer la proposition permettant d'effectuer des changements de variables de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^4}\mathrm{d}t$ puis déterminer une expression de ϕ'.
7. Soit $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}$. Qu'en déduire ?
8. Définir les notions d'ensembles dénombrables et au plus dénombrables. Montrer que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables. Expliquer comment montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrables. Donner, sans justification, deux autres ensembles dénombrables et deux ensembles qui ne sont pas au plus dénombrables.
9. Rappeler les définitions des notations $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ ou $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties d'un ensemble Ω. Rappeler les lois de De Morgan et les distributivités pour ces réunions et intersections généralisées. Démonstrations exigibles, au choix de l'interrogation.