Chapitre 20 : Convexité

ECG1 A, Lycée Hoche

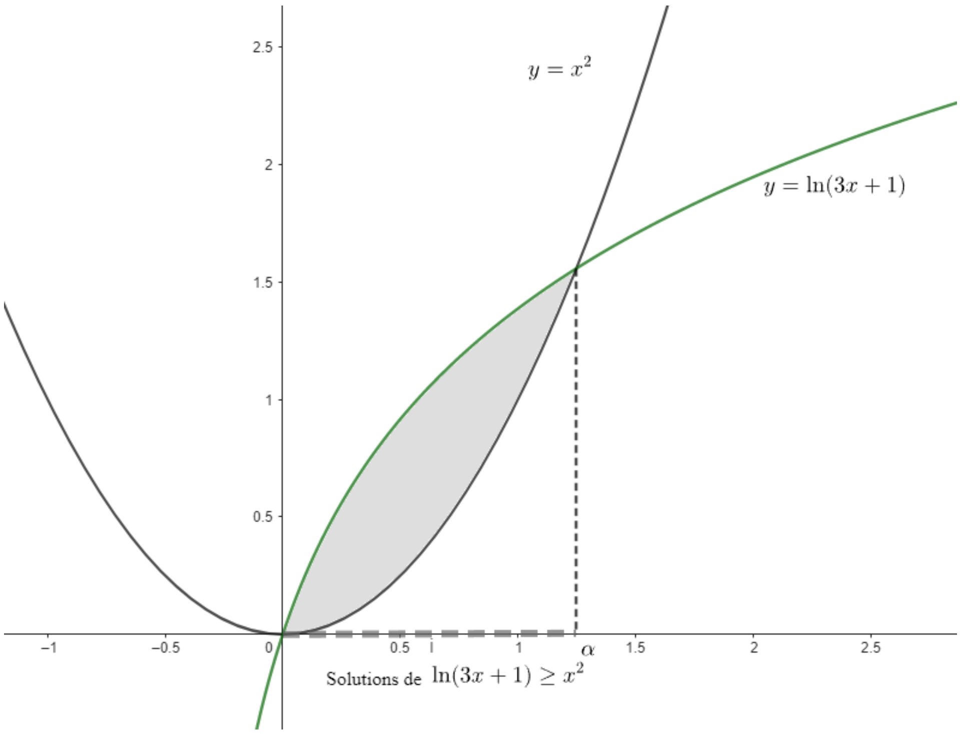
I. Fonctions convexes et concaves

1. Position relative de deux courbes (rappel)

Tout d'abord, rappelons le liens suivant entre résolution d'équations et tracés de courbes.

Définition 1. Soit I une partie de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions définies sur I. On dit que la courbe de f est au dessus de la courbe de g sur I si :

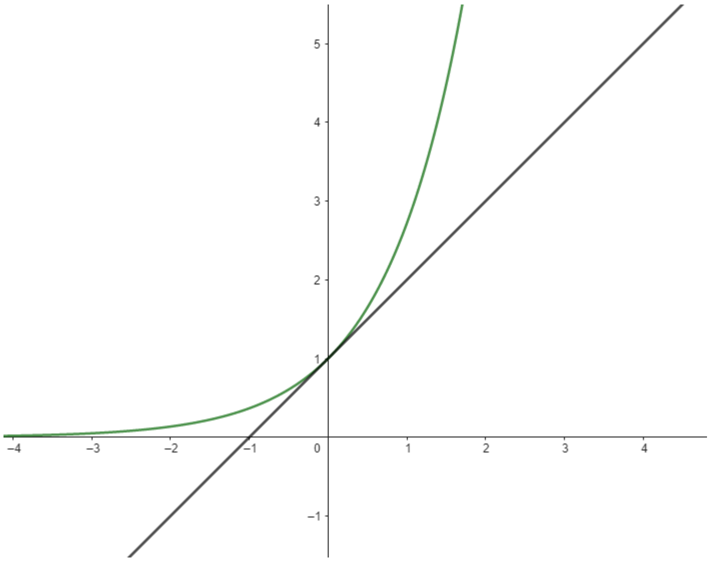
$$\forall x \in I, f(x) \geq g(x).$$



Exemple 2. Dans la représentation graphique ci-dessus, on a tracé les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $g : x \mapsto \ln(3x+1)$ (définie sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$).

Résoudre l'inéquation $\ln(3x+1) \geq x^2$ d'inconnue $x \in]-\frac{1}{3}, +\infty[$ revient à déterminer les points en lesquels la courbe de g est au dessus de la courbe de f. Ici, on peut démontrer (par bijection monotone) que l'équation $\ln(3x+1) = x^2$ admet une unique solution strictement positive α, et que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(3x+1) \geq x^2$ est $[0, \alpha]$.

Autrement dit, la courbe de g est au dessus de la courbe de f sur $[0, \alpha]$.

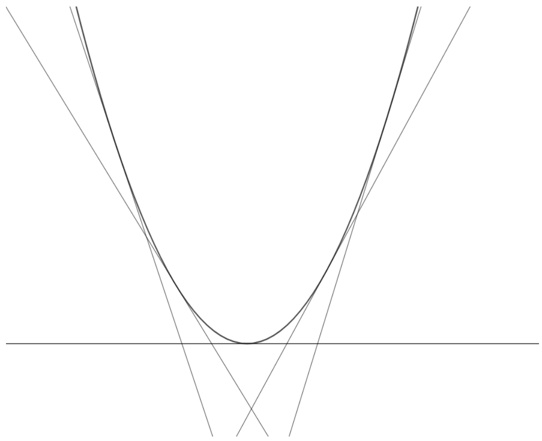


Exemple 3. Ce graphique représente la courbe de la fonction exponentielle, et la droite d'équation $y = x + 1$.

On démontre aisément que la courbe de l'exponentielle est au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Cette droite est la tangente à la courbe de l'exponentielle en 0. Ceci illustre une propriété majeure des fonctions convexes **qui sont dérivables** : la courbe d'une fonction convexe est au dessus de toutes ses tangentes.

Voici une autre fonction convexe avec quelques unes de ses tangentes.



Remarque. La tangente à la courbe d'une fonction en un point n'est bien définie qu'à condition que cette fonction soit dérivable en ce point, alors que la notion de fonction convexe est définie sans hypothèse de dérivabilité.

2. Fonction convexe, fonction concave

On prendra garde à bien travailler sur un intervalle.

Définition 4. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

(i) On dit que f est ***convexe*** sur I si :

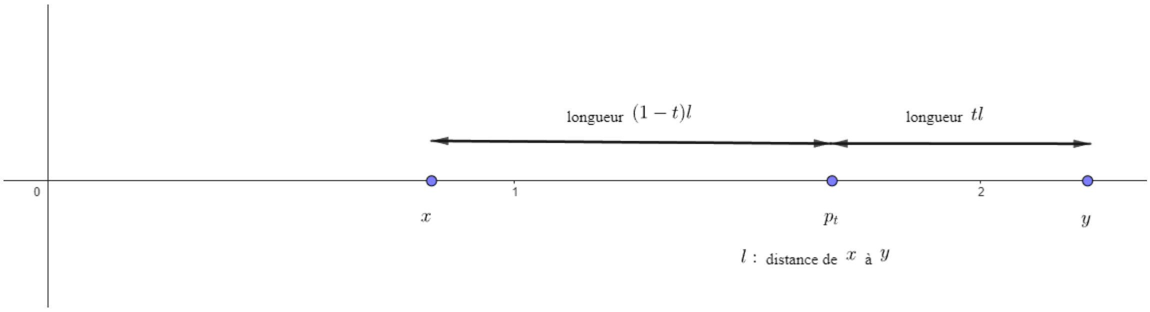
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

(ii) On dit que f est ***concave*** sur I si :

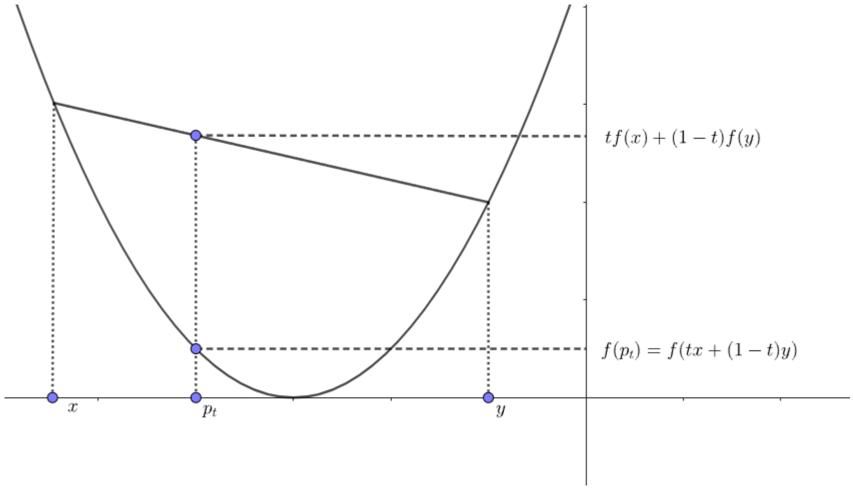
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Remarque. Comment lire cette définition :

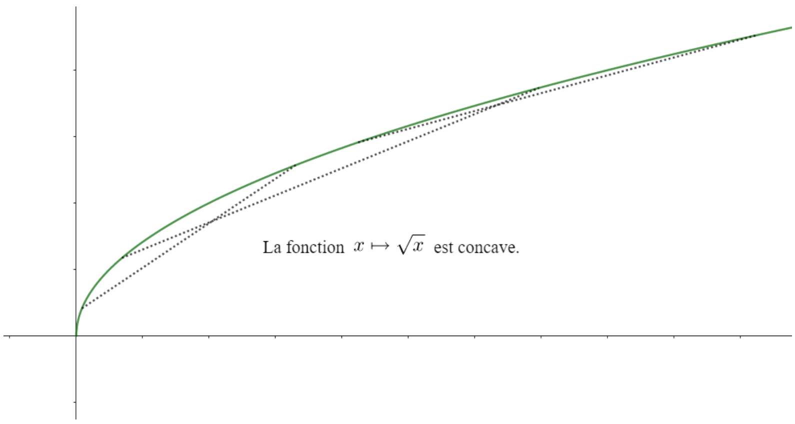
(i) Soit x et y deux points de I et $t \in [0,1]$. Alors, $p_t = tx + (1-t)y$ est le barycentre de x affecté du poids t, et de y affecté du poids $1-t$. Ainsi, si t "varie" entre 0 et 1, alors p_t varie en décrivant le segment d'extrémités x et y.



(ii) On peut montrer que pour tout $t \in [0,1]$, le réel $tf(x)+(1-t)f(y)$ est l'ordonnée du point d'abscisse p_t de la corde de la courbe de f entre les points d'abscisses x et y.



(iii) Ainsi, on retiendra : une fonction convexe est une fonction en **dessous** de ses cordes. De même, une fonction concave est une fonction au dessus de ses cordes.



Remarque. Voici une autre formulation équivalente de la définition ci-dessus :

(i) f est convexe sur l'intervalle I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2, t_1 + t_2 = 1 \implies f(t_1x + t_2y) \leq t_1f(x) + t_2f(y).$$

(ii) f est concave sur l'intervalle I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2, t_1 + t_2 = 1 \implies f(t_1x + t_2y) \geq t_1f(x) + t_2f(y).$$

L'équivalence se démontre très simplement (poser $t_2 = 1 - t$ pour passer d'une définition à l'autre).

Remarque. Si le chapitre s'appelle "Convexité", et pas "Convexité et concavité", c'est suite à la proposition suivante, qui nous permet de démontrer les résultats pour les fonctions convexes, puis d'en déduire un résultat analogue pour les fonctions concaves immédiatement. L'usage a fait que le mot "convexité" est resté pour parler des propriétés de convexité et de concavité des fonctions réelles.

Proposition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors, f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.*

Démonstration. À noter (important!). □

Exemple 6. Les fonctions affines (dont les constantes) sont convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (Un peu théorique) Si une fonction est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$, alors c'est une fonction affine (éventuellement constante).

Exemple 8. À l'aide de la définition, montrons que $h : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9. On admet que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer :

$$\forall x \in [1, e], \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}.$$

Exercice 10. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, et que g est convexe et croissante (sur $\mathbb{R}$). Montrer que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si f est une fonction dont le domaine de définition est un intervalle, alors on dit que f est convexe si elle est convexe sur tout son ensemble de définition (idem pour concave).

Remarque. La majorité de nos fonctions usuelles possèdent des propriétés de convexité, mais qui peuvent s'avérer difficile à démontrer en revenant à la définition. La dérivabilité nous est alors d'une grande aide.

II. Caractérisations de la convexité à l'aide de la dérivation

1. Convexité des fonctions dérivables

En pratique, nous manipulerons souvent des fonctions $\mathcal{C}^2$ (paragraphe suivant). Néanmoins, ce point est important pour l'interprétation graphique qu'il donne de la convexité, et les inégalités qui en découlent.

Rappel : Si f est une fonction dérivable en un point a, alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Proposition 11. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) f est convexe sur I.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) La courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes sur I. Autrement dit :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

De même, il est équivalent de dire :

(i) f est concave sur I.

(ii) f' est décroissante sur I.

(iii) La courbe de f est en dessous de toutes ses tangentes sur I. Autrement dit :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration. Uniquement $(ii) \implies (iii)$ - cas convexe. Reste admis (technique, et nécessite encore d'autres inégalités liées à la convexité). $\square$

Exercice 12. Trouver une autre démonstration de $(ii) \implies (iii)$ (cas convexe). Pour cela, pour $a \in I$ fixé, étudier les variations de $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \end{array} \right.$.

Exemple 13. Montrer que la fonction exponentielle est convexe. Montrer que la fonctions $x \mapsto \ln(x)$ est concave. Étudier la convexité de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

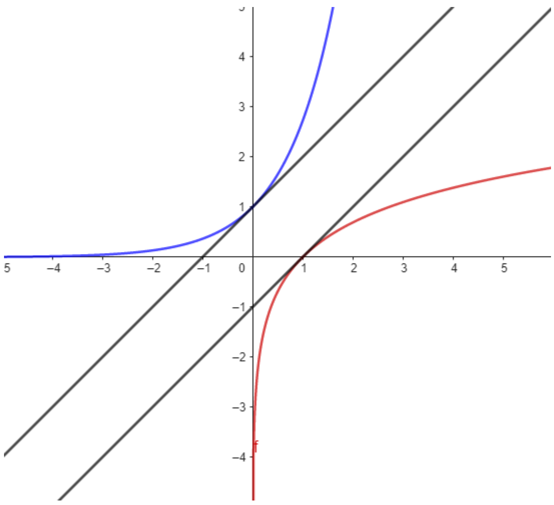
Exemple 14. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 15. (Un peu théorique, facultatif) Que dire de la convexité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$? On utilisera la continuité de cette fonction et la définition de la notion de concavité.

Remarque. Inégalités de convexité classiques

(i) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa tangente en 0 est la droite d'équation $y = x+1$. D'après la proposition précédente,
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1.$$

(ii) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa tangente en 1 est la droite d'équation $y = x-1$. On en tire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x-1$$
que l'on peut réécrire (à bien comprendre !)
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x.$$



2. Convexité des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

C'est cette proposition qu'on utilise le plus souvent pour étudier la convexité des fonctions réelles.

Proposition 16. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) f est convexe sur I,

(ii) f'' est positive sur I

De même, f est concave sur I ssi f'' est négative sur I.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente : f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I ssi f'' est positive sur I (car f' est dérivable sur l'intervalle I). $\square$

Remarque. On peut ainsi compléter l'étude d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ en étudiant le signe de sa dérivée seconde pour déterminer sa convexité.

Exemple 17. Étudier la convexité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

Remarque. A nouveau, les questions de convexité sont souvent utiles pour démontrer des inégalités. Dans ce cas, il faut bien avoir en tête les deux interprétations géométriques (cordes et tangentes) pour les utiliser.

Exemple 18. Étudier la convexité de $x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur son domaine de définition. En déduire :

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

III. Point d'inflexion, extrema

1. Point d'inflexion

Un point d'inflexion est tout simplement un point en lequel une fonction change de convexité. Ils aident au tracé d'un graphique, et ont souvent une interprétation utile en sciences.

Définition 19. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $x_0 \in I$ un point qui n'est pas une extrémité de I. On dit que f admet un point d'inflexion en x_0 si f change de convexité en ce point, autrement dit si l'on est dans un des cas suivant :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ et tel que f est convexe sur $]x_0 - \alpha, x_0]$ et concave sur $[x_0, x_0 + \alpha[$.

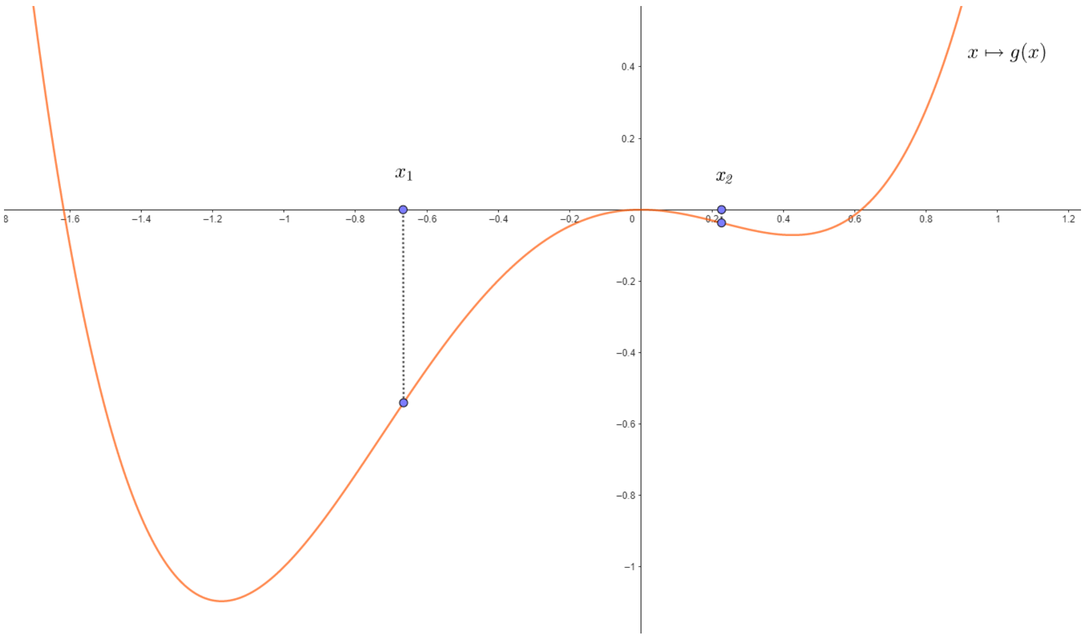
(ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ et tel que f est concave sur $]x_0 - \alpha, x_0]$ et convexe sur $[x_0, x_0 + \alpha[$.

Voici une caractérisation simple pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$:

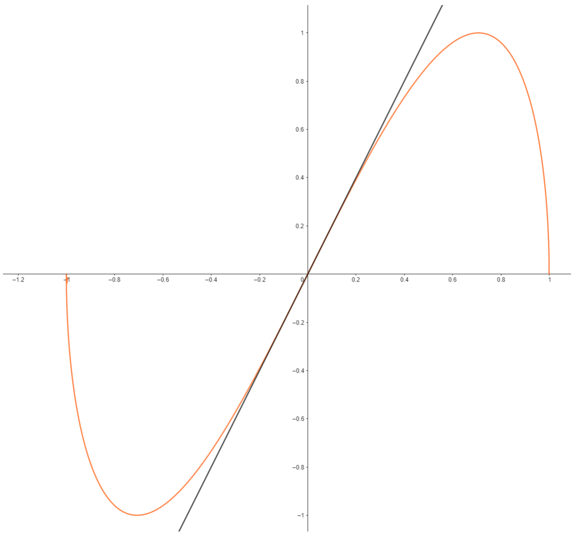
Proposition 20. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, et soit $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Alors, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_0.*

Démonstration. Admis. □

Les points d'inflexion sont notables sur un graphique. Ci-dessous, la fonction g admet des points d'inflexion en x_1 et x_2.



En un point d'inflexion, la courbe est "traversée" par sa tangente.



On s'en sert souvent comme des "repères" pour tracer le plus fidèlement possible une courbe. L'étude de convexité d'une fonction comprends la donnée de ses points d'inflexion (si possible).

Exemple 21. Étudier la fonction $g : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ jusqu'au tracé de son graphe, étude de convexité incluse.

Exercice 22. Déterminer les points d'inflexion de la fonction $x \mapsto xe^{-\dfrac{x^2}{2}}$.

2. Convexité et extrema

Les fonctions convexes (ou concaves) sont particulièrement appréciées en analyse, car la recherche de leurs extrema (globaux!) est facilitée par la proposition suivante, formulée pour les fonctions $\mathcal{C}^2$.

Proposition 23. *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Si a est un point critique de f (i.e si $f'(a) = 0$), alors f admet un minimum global en a sur I.*

Remarque. La réciproque est vraie à condition que a ne soit pas une extrémité de I, mais elle n'est pas liée à la convexité (voir cours sur la dérivation).

Remarque. La même démonstration démontre la même proposition si f est simplement de classe $\mathcal{C}^1$, mais (étrangeté du programme) ce résultat n'est au programme que pour les fonctions $\mathcal{C}^2$.

Démonstration. Si f est convexe sur I, étant dérivable sur I (car de classe $\mathcal{C}^2$), sa courbe est au dessus de toutes ses tangentes sur I. $a \in I$ donc la courbe de f est au dessus de sa tangente en a :

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) = f(a)$$

car $f'(a) = 0$. Donc f admet un minimum global en a sur I. □

De même :

Proposition 24. *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ et concave sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Si $f'(a) = 0$, alors f admet un maximum global en a sur I.*

Démonstration. Posons $g = -f$. f est concave sur I, donc par théorème, g est convexe sur I. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, $g = -f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur I (linéarité de la dérivation) et $g'(a) = -f'(a) = 0$.

Par le théorème précédent, g admet un minimum global en a sur I.

Donc $\forall x \in I, -f(x) \geq -f(a)$.

Donc $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$, d'où le résultat. □